И.В. Сафронова

Дискретная математика

Конспект лекций

Челябинск

2020

Уральский социально-экономический институт
ОУП ВПО
«Академия труда и социальных отношений»
Кафедра гуманитарных, естественнонаучных и математических дисциплин

И.В. Сафронова

Дискретная математика

Конспект лекций

Челябинск

2020

Сафронова, И.В. Дискретная математика: конспект лекций/ И.В. Сафронова; УрСЭИ (филиал) ОУП ВПО «АТиСО». – Челябинск, 2020. – 76 с.

Конспект лекций по дисциплине «Дискретная математика» составлен в соответствии с требованиями основной профессиональной образовательной программы подготовки бакалавров по направлению 09.03.03 «Прикладная информатика».

Адресовано студентам всех форм обучения по направлению 09.03.03 «Прикладная информатика».

Автор *Сафронова И.В.,* канд.техн.наук, доцент кафедры Кафедра гуманитарных, естественнонаучных и математических дисциплин УрСЭИ (филиал) ОУП ВПО «АТиСО»

Рецензент *Мадудин В.Н.,* канд.техн.наук, доцент кафедры Кафедра гуманитарных, естественнонаучных и математических дисциплин УрСЭИ (филиал) ОУП ВПО «АТиСО»

Утверждено учебно-методическим советом УрСЭИ (филиал) ОУП ВО «АТ и СО» (протокол № 5 от 13.01.2020 г.)

Оглавление

Тема 1. Введение в теорию множеств

1.1. Множества

1.1.1. Основные понятия

Множество относится к первоначальным понятиям науки, не определяемым через другие, более простые термины. *Множество представляет собой определенную совокупность объектов, объединенных в единое целое в соответствии с некоторыми признаками и правилами.* Множества обозначаются: A, B, C, X, Y, Z. Примеры множеств:

- множество всех атомов на Марсе;
- множество точек окружности;
- множество решений заданного уравнения;
- множество всех действительных чисел - R.

Предметы (объекты), составляющие данное множество, называют его элементами. Элементы множеств обозначаются: a, b, c, x, y, z. Элементы множества и само множество связаны между собой отношением «принадлежность»:

$x \in A$ - *элемент x принадлежит множеству A,*

$x \bar{\in} A$ - *элемент x не принадлежит множеству A.*

Множество называется конечным, если оно состоит из конечного числа элементов, и бесконечным - в противном случае:

- множество действительных чисел - бесконечно;
- множество планет солнечной системы - конечно, всего 9 планет.

Если каждый элемент множества A является вместе с тем и элементом множества B, то A называется подмножеством множества B:

$A \subseteq B - A$ содержится в B (или A включено в B) $\Rightarrow A$ подмножество B;

Если $A \subseteq B$ и $A \neq B$, то A называется *строгим (собственным) подмножеством* множества B (обозначается $A \subset B$).

Множества A и B называются равными, если каждый элемент множества A является вместе с тем и элементом множества B, и каждый элемент B является элементом A:

$A = B \Leftrightarrow A \subseteq B$ *и* $B \subseteq A$.

Множество $\varnothing$, *не содержащее ни одного элемента, называется пустым множеством.* Очевидно, что $\forall A \;\; \varnothing \subseteq A$.

Пример. Множество решений уравнения $x^2 + 1 = 0$ во множестве R – пустое множество $\varnothing$.

Множество U, содержащее в себе все элементы рассматриваемых множеств, называется универсальным множеством.

Мощность (кардинальное число) множества A обозначается как $|A|$. Для конечных множеств мощность – это число элементов. Например, $|\varnothing|$ = 0, но $|\{\varnothing\}|$ = 1.

Два множества A и B имеют одну и ту же мощность (или равномощны), если существует взаимно однозначное соответствие между этими множествами. Обозначают равномощность в виде $|A| = |B|$.

Множество A есть *бесконечное множество*, если оно имеет ту же мощность, что и хотя бы одно из его собственных подмножеств; в противном случае A – конечное множество.

Множества, равномощные множеству натуральных чисел N, называются *счетными.* Каждое бесконечное подмножество счетного множества счетное. Объединение счетного множества счетных множеств есть счетное множество.

Для описания множеств будем использовать два способа:

1. *Перечисление*: $A = \{a, b, c\}$; $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$.
2. *Задание множества* с помощью записи свойства, определяющего отношение принадлежности элементов данному множеству:

$A = \{x\colon \Theta(x)\}$ – множеству А принадлежат все те и только те элементы x, которые обладают свойством $\Theta(x)$.

Примеры:

- $[a, b] = \{x\colon a \le x \le b\}$ – отрезок;
- $(a, b) = \{x\colon a < x < b\}$ – интервал;
- $[a, b) = \{x\colon a \le x < b\}$ – полуинтервал;
- $(a, b] = \{x\colon a < x \le b\}$ – полуинтервал.

Диаграммы Венна – геометрические представления множеств. Построение диаграммы заключается в изображении большого прямоугольника, представляющего универсальное множество U, а внутри него – кругов (или каких-либо других замкнутых фигур), представляющих множества. Фигуры должны пересекаться в наиболее общем случае, требуемом в задаче, и должны быть соответствующим образом обозначены. Точки, лежащие внутри различных областей диаграммы, могут рассматриваться как элементы соответствующих множеств.

1.1.2. Операции над множествами

Основными операциями над множествами являются:

- объединение;
- пересечение;
- разность;
- симметрическая разность;
- дополнение.

Объединением $A \cup B$ множеств A и B называется множество, каждый элемент которого принадлежит *хотя бы одному* из множеств A или B:

$A \cup B = \{x\text{: } x \in A \vee x \in B\}$.

Знак $\vee$ – “или”, *логическое сложение*.

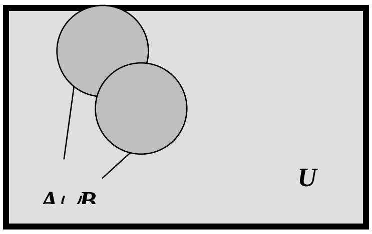


Рис. 1.1. Объединение множеств.

Пересечением $A \cap B$ множеств A и B называется множество, каждый элемент которого принадлежит одновременно и множеству A, и множеству B:

$A \cap B = \{x\text{: } x \in A \;\&\; x \in B\}$.

Знак & (также используют обозначение $\wedge$*)* – “и”, логическое умножение.

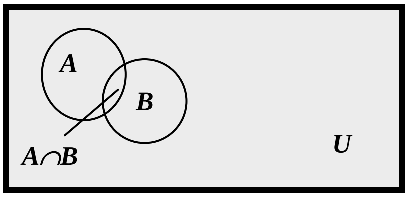


Рис. 1.2. Пересечение множеств.

Разностью $A \setminus B$ множеств A и B называется множество, состоящее из элементов множества A, не входящих во множество B:

$$A \setminus B = \{x: x \in A \ \& \ x \notin B\}.$$

A\B

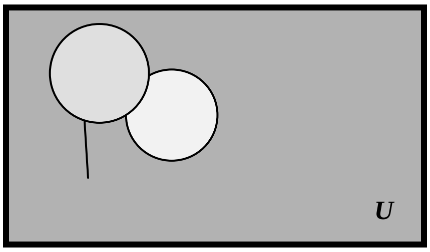


Рис. 1.3. Разность множеств.

Симметрической разностью $A \Delta B$ множеств A и B называется множество, состоящее из элементов множества A, не входящих во множество B или из элементов множества B, не входящих в множество A:

$$A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B) = \{x: (x \in A \ \& \ x \notin B) \vee (x \notin A \ \& \ x \in B)\}.$$

Дополнением $\overline{A}$ множества A называется разность универсального множества U и множества A:

$$\overline{A} = U \setminus A = \{x: x \in U \ \& \ x \notin A\}.$$

Декартовым (прямым) произведением $A \times B$ множеств A и B является множество всех упорядоченных пар (x, y), где $x \in X$ и $y \in Y$:

$$A \times B = \{(x, y): x \in A \ \& \ y \in B\}.$$

1.1.3. Свойства операций над множествами

Пусть задано универсальное множество U. Тогда $\forall A, B, C \subset U$ выполняются следующие свойства:

1. *Идемпотентность:* $A \cup A = A$, $A \cap A = A$.
2. *Коммутативность:* $A \cup B = B \cup A$, $A \cap B = B \cap A$.
3. *Ассоциативность:* $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$, $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$.
4. Дистрибутивность: $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$, $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.
5. *Поглощение:* $(A \cap B) \cup A = A$, $(A \cup B) \cap A = A$.
6. *Свойства нуля:* $A \cup \varnothing = A$, $A \cap \varnothing = \varnothing$.
7. *Свойства единицы:* $A \cup U = U$, $A \cap U = A$.

8. *Инволютивность:* $\overline{\overline{A}} = A$.

9. *Правила де Моргана:* $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$, $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$.

10. *Свойства дополнения:* $A \cup \overline{A} = U$, $A \cap \overline{A} = \varnothing$.

11. *Выражение для разности:* $A \setminus B = A \cap \overline{B}$.

1.1.4. Числовые множества

К числовым множествам относятся:

- множество натуральных чисел $N = \{1, 2, 3, 4,...,n,...\}$;
- множество целых чисел $Z = \{...-n,…,-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3,...,n,...\}$;
- множество рациональных чисел $Q = \{m/n;\ m,n \in Z;\ n \neq 0\}$;
- множество действительных чисел R.

Множество действительных чисел включает в себя все числовые множества: $N \subset Z \subset Q \subset R$. Множества N, Z, Q – подмножества R.

1.5. Векторы, прямые произведения, проекции векторов

Для описания свойств элементов множества удобны векторные представления множеств.

Вектор x представляет собой упорядоченный набор элементов $x = (x_1, x_2, …, x_n)$, где $x_1, x_2, …, x_n$ – компоненты (или координаты) вектора x; n – длина (или размерность).

Вектора $x = (x_1, x_2, …, x_n)$ и $y = (y_1, y_2, …, y_n)$ *равны,* если $n = m$ и $\forall i = \overline{1,\dots,n}: x_i = y_i$.

Прямым произведением множеств $A_1, A_2, \dots, A_n$ является множество всех возможных векторов $(a_1, a_2, …, a_n)$ длины n, для которых $\forall i = \overline{1,\dots,n}:$ $a_i \in A_i$. Прямое произведение обозначается: $A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$. Если $A_1 = A_2 = \dots = A_n$, то $A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n = A^n$.

Мощность прямого произведения множеств $A_1, A_2, \dots, A_n$ равна произведению мощностей этих множеств:

$$|A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n| = |A_1| \cdot |A_2| \cdot \ldots \cdot |A_n|.$$

Операции над множествами векторов прямого произведения множеств аналогичны соответствующим операциям над множествами элементов.

Проекцией вектора x на i-ю ось является его i-я компонента $пр_i x = x_i$.

Проекцией вектора x на оси i_1, i_2, … , i_k является вектор $np_{i_1,i_2,\dots,i_k}x=\left(x_{i_1},x_{i_2},\dots,x_{i_k}\right)$.

Пусть X – множество векторов длины n, компонентами которых являются числа. Пусть на множестве X содержатся два некоторых вектора $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ и $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$.

1.2. Отношения

1.2.1. Бинарные отношения. Основные понятия

Отношения – это один из способов задания взаимосвязей между элементами множества. Наиболее распространены унарные и бинарные отношения.

Унарные (одноместные) отношения отражают наличие какого-либо определенного признака R у элементов множества A.

Все элементы множества A, обладающие признаком R, образуют некоторое подмножество: $A^R = \{a: a\in A \ \&\ a\in R\}$.

Бинарные (двухместные) отношения используются для определения взаимосвязей, которыми характеризуются пары элементов множества A. Например, на множестве людей могут быть заданы следующие бинарные отношения: «жить в одном городе», «учиться в одном институте».

В общем случае отношения могут быть *n-местными*. Под *n-местным* отношением понимают подмножество R прямого произведения n множеств:

$R\subseteq M_1\times M_2\times\dots\times M_n$.

Говорят, что элементы a_1, a_2, …, a_n ($a_1\in M_1$, $a_2\in M_2$, …, $a_n\in M_n$) находятся в отношении R, если $(a_1, a_2, \dots, a_n)\in R$. Если n-местное отношение R задано на множестве M своих элементов, т.е. $M_1=M_2=\dots=M_n=M$, то $R\subseteq M^n$.

Далее будем рассматривать бинарные отношения.

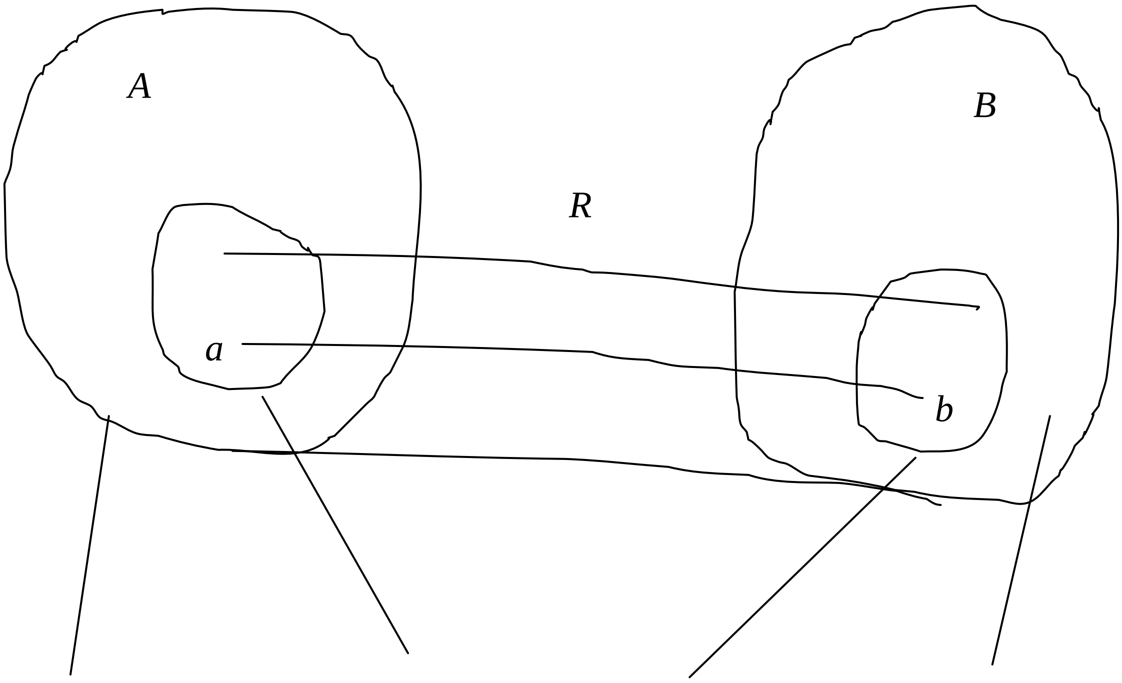
Бинарным отношением R называется подмножество пар $(a,b) \in R$ декартового произведения $M_1\times M_2$, где $R \subseteq M_1\times M_2$. Множество M_1 – область определения отношения R, множество M_2 – область значений отношения R.

Если задано отношение R между парами элементов одного и того же множества M, то $R \subseteq M\times M$. Вместо записи $(a,b) \in R$ используют также обозначение $a\ R\ b$.

На рис. 2.1 представлена графическая иллюстрация бинарного отношения $R \subseteq A \times B$.

Область $D(R)$ определения и область значений $Q(R)$ отношения R определяются в виде:

$D(R) = \{a: (a,b) \in R\}$, $Q(R) = \{b: (a,b) \in R\}$.



Элементы множества A, не включенные в R

Элементы множеств A и B, включенные в R

Элементы множества B, не включенные в R

Рис. 1.4.

Задать бинарные отношения можно любым способом задания множеств:

1) В виде характеристического свойства $R = \{(a,b): (a,b) \in R\}$, где в правой части равенства вместо R записывается характеристическое свойство.

2) *Списком (перечислением) пар,* для которых выполняется данное отношение. Например, $R = \{(a,b), (a,d), (b,c)\}$.

3) *Матрицей*. Отношению $R \subseteq M \times M$, где $M = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$, соответствует квадратная матрица порядка n, в которой элемент c_{ij}, стоящий на пересечении *i-й* строки и *j-го* столбца, равен *1*, если между a_i и a_j имеет место отношение R, или *0*, если оно отсутствует:

$$c_{ij} = \begin{Bmatrix} 1, если (a_i, a_j) \in R, \\ 0, если (a_i, a_j) \notin R. \end{Bmatrix}.$$

<u>*Пример 2.1.*</u> Пусть $M = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Задать в виде характеристического свойства, списком (в явном виде) и матрицей отношение $R \subseteq M \times M$, если R означает «быть меньше».

<u>*Решение.*</u> Отношение R как множество содержит все пары элементов a,b из M, такие что $a<b$. Тогда отношение R в виде характеристического свойства имеет вид:

$R = \{(a,b):\ a<b,\ a,b \in M\}$.

В виде списка отношение R выглядит следующим образом:

$R = \{(1,2), (1,3), (1,4), (1,5), (2,3), (2,4), (2,5), (3,4), (3,5), (4,5)\}$.

Матрица отношения R приведена на рис. 1.5.

R	***1***	***2***	***3***	***4***	***5***
1	0	1	1	1	1
2	0	0	1	1	1
3	0	0	0	1	1
4	0	0	0	0	1
5	0	0	0	0	0

Рис. 1.5.

1.2.2. Свойства отношений

Пусть R – отношение на множестве M, $R \subseteq M \times M$. Тогда:

1) R – *рефлексивно,* если $\forall\ a \in M$ имеет место $a\ R\ a$ (например, отношение «жить в одном городе» – рефлексивно);

2) R – *антирефлексивно,* если ни для какого $a \in M$ имеет место $a\ R\ a$ (например, отношение «быть сыном» – антирефлексивно);

3) R – *симметрично,* если $a\ R\ b$ влечет $b\ R\ a$ (например, отношение «учиться в одном институте» – симметрично);

4) R – *антисимметрично,* если $a\ R\ b$ и $b\ R\ a$ влекут $a = b$, т.е. ни для каких различных элементов a, b $(a \neq b)$ не выполняется одновременно $a\ R\ b$ и $b\ R\ a$ (например, отношения «быть сыном», «быть начальником» – антисимметричны);

5) R – *транзитивно,* если $a\ R\ b$ и $b\ R\ c$ влечет $a\ R\ c$ (например, отношения «быть сыном», «быть моложе» – транзитивны);

6) R – *полно или линейно,* если $a\,R\,b$ и $a \neq b$ влечет $a\,R\,b \vee b\,R\,a$.

Пример 2.2. Пусть отношение R на M задано в виде диаграммы, состоящей из узлов и стрелок так, что узлам взаимно однозначно соответствуют элементы множества M, а стрелкам, соединяющим пару a и b в направлении от a к b – наличие отношения $a\,R\,b$. Определить графические особенности диаграммы в зависимости от характера свойств отношения R.

Решение.

1. Отношение $R \subseteq M \times M$ рефлексивно, если $\forall a \in M$ имеет место $a\,R\,a$. Соответствующая диаграмма рефлексивного отношения должна содержать петли во всех узлах (т.е. стрелки, начинающиеся и заканчивающиеся в одном узле).

2. Отношение R антирефлексивно, если ни для каких $a \in M$ не выполняется $a\,R\,a$. Диаграмма антирефлексивного отношения не должна содержать ни одной петли.

3. Отношение R симметрично, если из $a\,R\,b$ следует $b\,R\,a$. В диаграмме симметричного отношения для каждой стрелки, соединяющей два узла, существует также стрелка, соединяющая эти узлы в обратном направлении.

4. Отношение R антисимметрично, если из $a\,R\,b$ и $b\,R\,a$ следует $a = b$. В диаграмме антисимметричного отношения не существует двух различных узлов, связанных парой разнонаправленных стрелок.

5. Отношение R транзитивно, если из $a\,R\,b$ и $b\,R\,c$ следует $a\,R\,c$. В диаграмме транзитивного отношения для любых двух стрелок таких, что одна направлена от a к b, а другая – от b к c, существует стрелка, соединяющая a и c в направлении от a к c.

6. Отношение R полно, если $a\,R\,b$ и $a \neq b$ влечет $a\,R\,b \vee b\,R\,a$. В диаграмме полного отношения любые два узла соединены между собой хотя бы одной стрелкой.

Пусть R – отношение на множестве M, $R \subseteq M^2$ и $/M/ = n$. Перенумеруем элементы множества M. Тогда отношение R можно представить матрицей $R = array$ [1…n, 1…n] *of* 0…1, где

$$R[i,\, j] = \begin{Bmatrix} 1, \textit{ если } iRj, \\ 0, \textit{ если } \overline{iRj}. \end{Bmatrix}.$$

1.2.4. Операции над отношениями

Основными операциями над отношениями являются:

- *Объединение* $R_1 \cup R_2$: $R_1 \cup R_2 = \{(a,b): (a,b) \in R_1 \vee (a,b) \in R_2\}$.
- *Пересечение* $R_1 \cap R_2$: $R_1 \cap R_2 = \{(a,b): (a,b) \in R_1 \,\&\, (a,b) \in R_2\}$.
- *Разность* $R_1 \setminus R_2$: $R_1 \setminus R_2 = \{(a,b): (a,b) \in R_1 \,\&\, (a,b) \notin R_2\}$.
- *Дополнение* $\overline{R}$: $\overline{R} = U \setminus R$, *где* $U = M_1 \times M_2$ (*или* $U = M^2$).
- *Обратное отношение* R^{-1}: $R^{-1} = \{(a,b): (b,a) \in R\}$.

Пример: если R – «быть больше», то R^{-1} – «быть меньше».

1) *Составное отношение (композиция)* $R_1 \circ R_2$.

Пусть заданы множества: M_1, M_2, M_3 и отношения $R_1 \subseteq M_1 \times M_2$, $R_2 \subseteq M_2 \times M_3$. Составное отношение определяется по формуле:

$$R_1 \circ R_2 = \{(a,b): \exists c \in M_2\ (a,c) \in R_1 \,\&\, (c,b) \in R_2\}.$$

Составное соотношение действует из M_1 в M_2 посредством R_1, а затем из M_2 в M_3 посредством R_2, т.е. $(a,b) \in R_1 \circ R_2$, если существует такое $c \in M_2$, что $(a,c) \in R_1$ и $(c,b) \in R_2$. В частности, если отношение R определено на множестве M, $R \subseteq M^2$, то составное отношение:

$$R \circ R = \{(a,b): (a,c) \in R \,\&\, (c,b) \in R\}.$$

Пример составного отношения: если R – «быть сыном», то $R \circ R$ – «быть внуком».

Обозначим $R(2) = R \circ R$. Тогда $\forall\ n > 1$ ($n \in N$) имеем:

$$R^{(n)} = \{(a,b): (a,c) \in R \,\&\, (c,b) \in R^{(n-1)}\}.$$

Композиция отношения R с самим собой на множестве M называется *степенью* отношения R на множестве M:

$$R^{(n)} = \underbrace{R \circ R \circ \ldots \circ R}_{n}.$$

Соответственно, $R^{(0)} = I$, $R^{(1)} = R$, $R^{(2)} = R \circ R$, …, $R^{(n)} = R^{(n-1)} \circ R$.

<u>*Пример.*</u> Пусть на множестве $M = \{1,2,3\}$ определено отношение R – «быть меньше». Задать в виде характеристического свойства и списком: отношения R, обратное отношение R^{-1}, дополнение $\overline{R}$. Сравнить отношения. Определить их свойства.

<u>*Решение.*</u>

$R = \{(a,b): a < b,\ a,b \in M\}$.

$R = \{(1,2), (1,3), (2,3)\}$.

$R^{-1} = \{(a,b): (b,a) \in R\} = \{(a,b): a > b\}$ – «быть больше».

$R^{-1} = \{(2,1), (3,1), (3,2)\}$.

$\overline{R} = (M \times M) \setminus R = \{(a,b): (b,a) \notin R\} = \{(a,b): a \geq b\}$ – «быть не меньше».

$\overline{R} = \{(1,1), (2,1), (2,2), (3,1), (3,2), (3,3)\}$.

Отношения R и R^{-1} – антирефлексивны, антисимметричны, транзитивны, т.е. являются отношениями строгого порядка. Данные отношения задают полный порядок на множестве M.

Отношение $\overline{R}$ – рефлексивно, антисимметрично, транзитивно, т.е. также задает полный порядок на множестве M.

<u>*Пример.*</u> *Пусть R_1 и R_2 – отношения на множестве натуральных чисел N:*

$R_1 = \{(a,b): b=a + 1, a,b \in N\}$, $R_2 = \{(a,b): b=a^2, a,b \in N\}$.

Определить составные отношения:

$R_1 \circ R_2$, $R_2 \circ R_1$, $R_1^{(2)}$, $R_2^{(2)}$, $R_1^{(n)}$, $R_2^{(n)}$.

<u>*Решение.*</u>

$R_1 \circ R_2 = \{(a,b): (a,c) \in R_1 \; \& \; (c,b) \in R_2 , a,b,c \in N\} = \{(a,b): c=a+1 \; \& \; c^2=b, a,b,c \in N\} = \{(a,b): (a+1)^2 = b, a,b \in N\} = \{(1,4), (2,9), (3,16), \ldots\}$.

$R_2 \circ R_1 = \{(a,b): (a,c) \in R_2 \; \& \; (c,b) \in R_1 , a,b,c \in N\} = \{(a,b): c=a^2 \; \& \; c+1=b, a,b,c \in N\} = \{(a,b): a^2+1 = b, a,b \in N\} = \{(1,2), (2,5), (3,10), \ldots\}$.

$R_1^{(2)} = R_1 \circ R_1 = \{(a,b): (a,c) \in R_1 \; \& \; (c,b) \in R_1 , a,b,c \in N\} = \{(a,b): c=a+1 \; \& \; c+1=b, a,b,c \in N\} = \{(a,b): a+2 = b, a,b \in N\} = \{(1,3), (2,4), (3,5), \ldots\}$.

$R_2^{(2)} = R_2 \circ R_2 = \{(a,b): (a,c) \in R_2 \; \& \; (c,b) \in R_2 , a,b,c \in N\} = \{(a,b): c=a^2 \; \& \; c^2=b, a,b,c \in N\} = \{(a,b): a^4 = b, a,b \in N\} = \{(1,1), (2,16), (3,81), \ldots\}$.

$R_1^{(n)} = \{(a,b): (a,c) \in R_1 \; \& \; (c,b) \in R_1^{(n-1)}, a,b,c \in N\} = \{(a,b): c=a+1 \; \& \; c+n-1=b, a,b,c \in N\} = \{(a,b): a+n = b, a,b \in N\} = \{(1,1+n), (2,2+n), (3,3+n), \ldots\}$.

$R_2^{(n)} = \{(a,b): (a,c) \in R_2 \; \& \; (c,b) \in R_2^{(n-1)}, a,b,c \in N\} \} = \{(a,b): c=a^2 \; \& \; c^{2^{n-1}}=b, a,b,c \in N\} = \{(a,b): a^{2^n} = b, a,b \in N\}$.

1.3. Соответствия

1.3.1. Основные определения. Свойства соответствий

Соответствие представляет собой способ задания взаимосвязей между элементами множества. Частными случаями соответствий являются *функции, отображения, преобразования, операции.* Соответствие относится к бинарным отношениям.

Пусть заданы множества A и B. *Соответствием* между A и B называется подмножество $G \subseteq A \times B$. На рис. 1.6 представлена графическая иллюстрация соответствия.

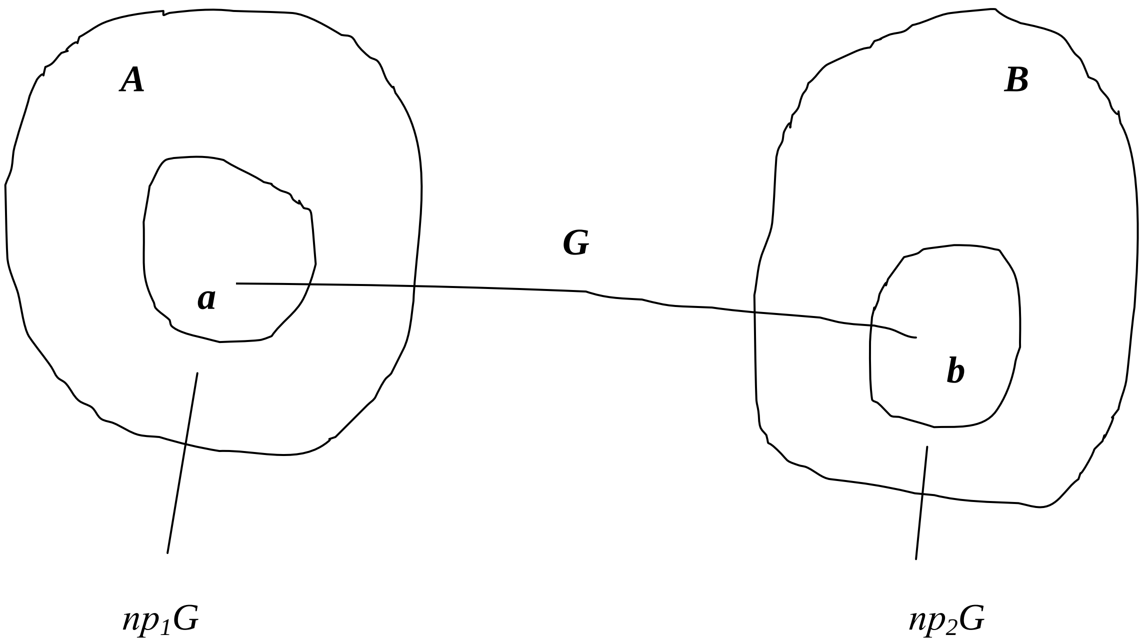


Рис. 1.6.

Областью определения соответствия G является множество $пр_1G = \{a: (a,b) \in G\}$. Областью значений соответствия G является множество $пр_2G = \{b: (a,b) \in G\}$.

Запись $(a,b) \in G$ означает, что b соответствует a при соответствии G.

Для соответствий $G \subseteq A \times B$ справедливы следующие свойства:

1) Если $пр_1G = A$, то соответствие G называется *всюду определенным*. В противном случае, если $пр_1G \subset A$, имеем *частично определенное* соответствие.
2) Если $пр_2G = B$, то соответствие G называется *сюръективным*.
3) *Образом элемента* a в множество B при соответствии G называется множество всех $b \in B$, соответствующих элементу $a \in A$. *Прообразом*

элемента b в множество A при соответствии G называется множество всех $a \in A$, которым соответствует элемент $b \in B$.

Соответствие называется *функциональным (или однозначным)*, если образом любого элемента $a \in np_1G$ является единственный элемент $b \in np_2G$.

1) Соответствие называется *взаимнооднозначным*, если оно:

- всюду определено;
- сюръективно;
- функционально;
- прообразом любого элемента $b \in np_2G$ является единственный элемент $a \in np_1G$.

При взаимнооднозначном соответствии мощности множеств равны, т.е. $|A| = |B|$.

2) Соответствие $H \subseteq B \times A$ называется *обратным* к G, если $(b,a) \in H$ тогда и только тогда, когда $(a,b) \in G$. Обратное соответствие обозначается G^{-1}.

<u>*Пример.*</u> Англо-русский словарь устанавливает соответствие между множествами английских и русских слов. Каковы свойства этого соответствия?

<u>*Решение.*</u> Данное соответствие:

- частично определенное (всегда можно найти английское слово, не содержащееся в словаре);
- не сюръективное (имеются русские слова, которых нет в словаре);
- не функциональное (часто одному английскому слову ставится в соответствие несколько русских слов);
- не взаимнооднозначное (в силу предыдущего).

1.3.2. Функции

Пусть f – соответствие из A в B. Это соответствие называют *функцией*, если $\forall\, a$: $(a,b) \in f \;\&\; (a,c) \in f \Rightarrow b=c$, т.е. функция представляет собой функциональное соответствие. Каждому элементу a из области определения функция f ставит в соответствие элемент b из области значений. Используют следующие обозначения функции:

$f: A \to B,\; A \xrightarrow{f} B,\; b = f(a).$

Если $b = f(a)$, то a – *аргумент* функции, b – *значение* функции.

Пусть $f: A \to B$, тогда

область определения функции: $f_A = \{a: a \in A \ \& \ \exists b \in B \ b = f(a)\}$;

область значений функции: $f_B = \{b: a \in B \ \& \ \exists a \in A \ b = f(a)\}$.

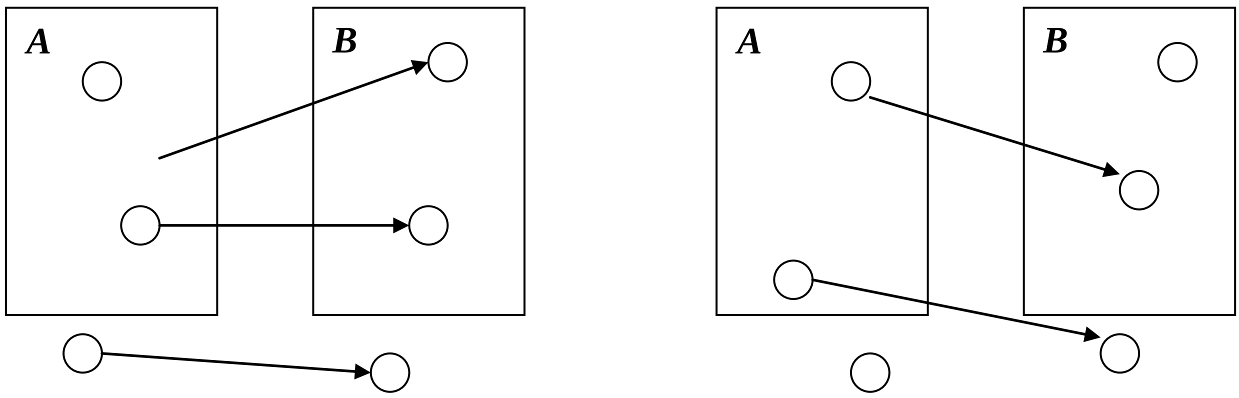
Если $f_A = A$, то функция называется *отображением* A в B (или *тотальной* функцией). Если $f_A = A \ \& \ f_B = B$, то функция называется отображением A на B.

Соответствие	Обязательное свойство		
	Функциональное	Всюду определенное	Сюръективное
Функция	+		
Отображение A в B	+	+	
Отображение A на B	+	+	+

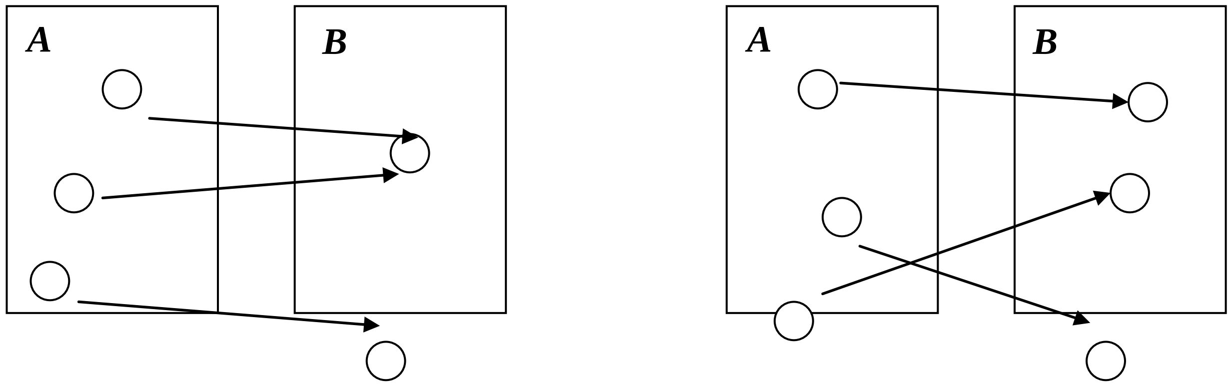
Функция $f: A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n \to B$ называется функцией n *аргументов* (или n-*местной* функцией).

Пусть $f: A \to B$, тогда функция f называется:

- *инъективной*, если $\forall b \in f_B \ b = f(a_1) \ \& \ b = f(a_2) \Rightarrow a_1 = a_2$;
- *сюръективной*, если $\forall b \in B \ \exists a \in A \ b = f(a)$;
- *биективной* (или *взаимнооднозначной*), если она инъективная и сюръективная. Рис. 1.7. иллюстрирует понятия соответствия, функции, инъекции, сюръекции и биекции.



Соответствие, но не функция Инъекция, но не сюръекция



Сюръекция, но не инъекция Биекция

Рис. 1.7. Различные виды функций

Функции f и g *равны,* если:

- их области определения совпадают, т.е. $f_A = g_A = A$;
- $a \in A\ f(a)=g(a)$.

Если соответствие, обратное к функции $f\colon A \to B$, является функциональным, то оно называется *обратной функцией* к f и обозначается f^{-1}. Для функции $f\colon A \to B$ обратная функция существует тогда и только тогда, когда f является взаимно однозначным соответствием между своими областями определения и значений.

Пусть даны функции $f\colon A \to B$ и $g\colon B \to C$. Функция $h\colon A \to C$ называется *композицией* (обозначается $f \circ g$) функций f и g, если

$\forall x \in A\ h(x) = g(f(x))$.

Функция, полученная из нескольких функций $f_1, f_2, \ldots, f_n$ некоторой композицией их между собой и переименовыванием аргументов, называется *суперпозицией* $f_1, f_2, \ldots, f_n$. Выражение, описывающее эту суперпозицию и содержащее функциональные знаки и символы аргументов, называется *формулой*.

Существует несколько *способов задания функции*:

- в виде графика;
- в виде таблицы;
- формулой;
- рекурсивной вычислительной процедурой. Например, функция $f(n)=1+2+\ldots+n$ описывается вычислительной процедурой, задаваемой следующими правилами:
- f(0)=0; 2) f(n)=f(n-1)+n.

Пример. Пусть имеем две функции $f(x)=5x$ и $g(x)=x+3$, заданные на множестве действительных чисел R. Чему равна композиция этих функций?

Решение. Композиции функций возможны в любом порядке. Композиция $h_1= f \circ g$ представляет собой подстановку f в g:

$$h_1= f \circ g = g(f(x)) = f(x) + 3 = 5x + 3.$$

Композиция $h_2= g \circ f$ представляет собой подстановку g в f:

$$h_2= g \circ f = f(g(x)) = 5\ g(x) = 5(x+3) = 5x + 15.$$

1.3.3. Операции

Всюду определенная (тотальная) функция $\varphi : M^n \to M$ называется *n-арной (n-местной) операцией* на M.

Если $\varphi : M \times M \to M$, то φ – *бинарная операция*. Она записывается $\varphi(a,b)$ или $a\ \varphi\ b$. Примеры бинарных операций: арифметические операции, операции над множествами (пересечение, объединение, разность) и др.

Функция одного аргумента $\varphi(x)$, имеющая тип $\varphi : M \to M$, называется *унарной операцией*. Примеры унарных операций: элементарные функции, дополнение множества и др.

Свойства бинарных операций:

1) φ - *ассоциативна,* если $\forall\, a,b,c \in M\ \ (a\ \varphi\ b)\ \varphi\ c = a\ \varphi\ (b\ \varphi\ c)$. Примеры: арифметические операции сложения и умножения, пересечение и объединение множеств.

2) φ - *коммутативна,* если $\forall\, a,b \in M\ \ a\ \varphi\ b = b\ \varphi\ a$. Примеры: арифметические операции сложения и умножения, пересечение и объединение множеств.

3) φ - *дистрибутивна слева* относительно операции ψ, если $\forall\, a,b,c \in M\ \ a\ \varphi\ (b\ \psi\ c) = (a\ \varphi\ b)\ \psi\ (a\ \varphi\ c)$ и φ - *дистрибутивна справа* относительно операции ψ, если $\forall\, a,b,c \in M\ \ (a\ \psi\ b)\ \varphi\ c = (a\ \varphi\ c)\ \psi\ (b\ \varphi\ c)$. Пример: операция умножения дистрибутивна относительно операции сложения слева и справа.

Операция является функцией. Поэтому для задания операций применимы все способы задания функций.

Тема 2. Математическая логика

2.1. Основные понятия

Основным объектом математической логики является высказывание. Высказывание – повествовательное предложение (утверждение, суждение), о котором имеет смысл говорить, что оно *истинно* или *ложно*. Истинностные значения «истина» и «ложь» будем обозначать прописными буквами *И* и *Л* соответственно.

Высказывание называется *простым (элементарным)*, если оно рассматривается как некое неделимое целое (аналогично элементу множества). *Сложным (составным)* называется высказывание, составленное из простых с помощью *логических связок (операций)*.

Основными логическими операциями над высказываниями являются: отрицание, конъюнкция, дизъюнкция, импликация, эквивалентность, неравнозначность.

Отрицанием (инверсией) высказывания P называется высказывание, истинное тогда и только тогда, когда высказывание P ложно, и ложное в противном случае. Обозначения: $\overline{P}$, $\neg P$. Читается: «не P». Отрицание определяется таблицей истинности (табл. 2.1).

Таблица 2.1

P	$\overline{P}$
И	Л
Л	И

Конъюнкцией (операцией «И», логическим произведением) двух высказываний P и Q называется высказывание, истинное тогда и только тогда, когда истинны оба высказывания, и ложное во всех других случаях. Обозначения: $P \ \& \ Q$, $P \cdot Q$, $P \wedge Q$. Читается: «P и Q». Конъюнкция определяется таблицей истинности (табл. 2.2).

Таблица2.2

P	Q	$P\&Q$
И	И	И
И	Л	Л
Л	И	Л
Л	Л	Л

Дизъюнкцией (операцией «ИЛИ», логической суммой) двух высказываний P и Q называется высказывание, ложное тогда и только тогда, когда оба высказывания ложны, и истинное – во всех других случаях. Обозначения: $P \vee Q$, $P + Q$. Читается: «P или Q» (понимается как неразделительное «или»). Дизъюнкция определяется таблицей истинности (табл. 2.3).

Таблица 2.3

P	Q	$P \vee Q$
И	И	И
И	Л	И
Л	И	И
Л	Л	Л

Импликацией (логическим следованием) двух высказываний P и Q называется высказывание, ложное тогда и только тогда, когда P истинно, а Q ложно, и истинное – во всех других случаях. Обозначения: $P \to Q$, $P \supset Q$. Читается: «если P, то Q», «P влечет Q»). Высказывание P называется *посылкой* импликации, а высказывание Q – *заключением*. Импликация определяется таблицей истинности (табл. 2.4).

Таблица 2.4

P	Q	$P \to Q$
И	И	И
И	Л	Л
Л	И	И
Л	Л	И

Эквивалентностью (равнозначностью, эквиваленцией) двух высказываний P и Q называется высказывание, истинное тогда и только тогда, когда истинностные значения P и Q совпадают, и ложное в противном случае. Обозначения: $P \leftrightarrow Q$, $P \sim Q$, $P \equiv Q$. Читается: «P эквивалентно Q», «P, если и только если Q», «P равнозначно Q». Эквивалентность определяется таблицей истинности (табл. 2.5).

Таблица 2.5

P	Q	$P \leftrightarrow Q$
И	И	И
И	Л	Л
Л	И	Л
Л	Л	И

Неравнозначностью (исключающим «ИЛИ», сложением по модулю 2) двух высказываний P и Q называется высказывание, истинное тогда и только тогда, когда истинностные значения P и Q не совпадают, и ложное – в противном случае. Обозначения: $P \oplus Q$, $P \,\Delta\, Q$. Читается: «P

неравнозначно Q», «либо P, либо Q», «или P, или Q» (понимается – в разделительном смысле). Неравнозначность определяется таблицей истинности (табл. 2.6).

Таблица 2.6

P	Q	$P \oplus Q$
И	И	Л
И	Л	И
Л	И	И
Л	Л	Л

Буквы, обозначающие высказывания, логические связки и скобки, составляют *алфавит* языков логики высказываний: алгебры логики и исчисления высказываний.

Логической формулой называется выражение, составленное из обозначений высказываний, логических операций и скобок, и удовлетворяющее следующим условиям:

- любая переменная, обозначающая высказывание, - формула;
- если P и Q – формулы, то $\overline{P}$, $P \,\&\, Q$, $P \vee Q$, $P \to Q$, $P \leftrightarrow Q$, $P \oplus Q$ – формулы;
- других формул нет.

Пример. Представить логическими формулами следующие высказывания:

1. «Сегодня понедельник или вторник».
2. «Идет дождь или снег».
3. «Если идет дождь, то крыши мокрые. Дождя нет, а крыши мокрые».
4. «Что в лоб, что по лбу».

Решение.

1. Составное (сложное) высказывание «Сегодня понедельник или вторник» состоит из двух простых:

P – «Сегодня понедельник»; Q – «Сегодня вторник».

Высказывания P и Q соединены связкой «или» в разделительном смысле. Поэтому данное высказывание представимо логической формулой: $P \oplus Q$.

2. Составное высказывание «Идет дождь или снег» состоит из двух простых:

P – «Идет дождь»; Q – «Идет снег».

Высказывания P и Q соединены связкой «или» не в разделительном, а в обычном смысле. Таким образом, логическая формула имеет вид: $P \vee Q$.

3. Первое предложение «Если идет дождь, то крыши мокрые» включает два простых высказывания:

P – «Идет дождь»; Q – «Крыши мокрые».

Высказывания P и Q соединены связкой «если … , то …»: $P \to Q$.

Второе предложение «Дождя нет, а крыши мокрые» также как и первое включает высказывания:

P – «Идет дождь»; Q – «Крыши мокрые».

Союз “а” имеет смысл связки «и», кроме того высказывание P используется с отрицанием, т.е. второе предложение представляется в виде: $\overline{P}\ \&\ Q$.

Далее, объединяем оба предложения в одно высказывание связкой &:

$(P \to Q)\ \&(\overline{P}\ \&\ Q)$.

4. Составное высказывание «Что в лоб, что по лбу» состоит из двух простых:

P – «В лоб»; Q – «По лбу».

Высказывания P и Q соединены связкой «равнозначно»: $P \leftrightarrow Q$.

2.2. Алгебра логики

В алгебре логики логические формулы рассматриваются как алгебраические выражения, которые можно преобразовывать по определенным правилам, реализующим логические законы. Каждая формула задает *логическую функцию*.

Алгебра логики – алгебра, образованная множеством $B=\{0, 1\}$ вместе со всевозможными операциями на нем. Символы *0, 1* не имеют арифметического смысла и интерпретируются как *{«нет», «да»}* или *{«ложно», «истинно»}*.

Функция $f\colon B^n \to B$ называется *функцией алгебры логики (логической функцией, булевой функцией)* от n переменных $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$. Множество всех логических функций n переменных обозначается $P_2(n)$.

Любую логическую функцию от n переменных можно задать *таблицей истинности*:

Таблица 2.7

$x_1,$	$\dots$	$, x_{n-1},$	x_n	$f(x_1, x_2, \dots, x_n)$
0	…	0	0	f_1
0	…	0	1	f_2
0	…	1	1	f_3
…	…	…	…	…
1	…	1	1	f_{2^n}

Набор значений переменных, на котором логическая функция принимает значение, равное $f=1$, называется *единичным набором функции* f, а множество всех единичных наборов – *единичным множеством функции* f.

Набор значений переменных, на котором логическая функция принимает значение, равное $f=0$, называется *нулевым набором функции* f, а множество всех нулевых наборов – *нулевым множеством функции* f.

Число всех возможных различных наборов значений n переменных логической функции $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ равно 2^n. Число всех различных функций n переменных равно 2^{2^n}, т.е. $|P_2(n)| = 2^{2^n}$.

Логическая функция $f \in P_2(n)$ *существенно зависит* от переменной x_i, если существует хотя бы один такой набор значений $a_1, \dots, a_{i-1}, a_{i+1}, \dots, a_n$, что

$$f(a_1, \dots, a_{i-1}, 0, a_{i+1}, \dots, a_n) \neq f(a_1, \dots, a_{i-1}, 1, a_{i+1}, \dots, a_n).$$

В этом случае x_i называют *существенной переменной*, в противном случае x_i называют *несущественной (фиктивной) переменной*.

Пример. Пусть логические функции $f_1(x_1, x_2)$ и $f_2(x_1, x_2)$ заданы следующей таблицей истинности:

Таблица 2.8

x_1	x_2	f_1	f_2
0	0	0	1
0	1	0	1
1	0	1	0
1	1	1	0

Для этих функций переменная x_1 – существенная, а переменная x_2 – несущественная.

По определению логические функции равны, если одна из другой получается введением (или удалением) несущественных переменных.

Множество всех логических функций одной переменной (унарных логических операций) $P_2(1)$ представлено в табл. 2.9 своими таблицами истинности, $|P_2(1)|=4$.

Таблица 2.9

Название операции	Обозначение	Переменная x		Фиктивные переменные
		0	1	
Нуль	0	0	0	x
Повторение переменной	X	0	1	
Отрицание	$\bar{x}$, $\neg x$	1	0	
Единица	1	1	1	x

Множество всех логических функций двух переменных (бинарных логических операций) $P_2(2)$ представлено в табл. 2.10 своими таблицами истинности, $|P_2(2)|=16$.

Логические функции трех и более переменных задаются таблицами истинности или формулами, состоящими из символов переменных, знаков унарных и бинарных операций и скобок.

Замечание. Для элементарных логических функций в инфиксной форме записи установлен приоритет: $\neg, \&, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$

и лишние скобки опускаются.

В общем случае формула описывает логическую функцию как *суперпозицию* других более простых функций.

Эквивалентными (равносильными) называются формулы, представляющие одну и ту же функцию. Эквивалентность формул обозначается знаком «=».

Метод установления эквивалентности двух формул заключается в следующем:

1) по каждой формуле восстанавливается таблица истинности;

2) полученные таблицы сравниваются по каждому набору значений переменных.

Другим методом выяснения эквивалентности формул является их преобразование в определенный вид, в котором их легко сравнить.

Таблица 2.10

Название операции	Переменная x	0	0	1	1	Фиктивные переменные
	Переменная y	0	1	0	1	
	Обозначение					
Нуль	0	0	0	0	0	x, y
Конъюнкция	$\&, \wedge, \cdot$	0	0	0	1	
	$\overline{\rightarrow}$	0	0	1	0	
Переменная x	x	0	0	1	1	y
	$\overline{\leftarrow}$	0	1	0	0	
Переменная y	y	0	1	0	1	X
Сложение по модулю 2	$\oplus, \Delta$	0	1	1	0	
Дизъюнкция	$\vee, +$	0	1	1	1	
Стрелка Пирса	$\downarrow$	1	0	0	0	
Эквивалентность	$\leftrightarrow, \sim$	1	0	0	1	
Отрицание y	$\bar{y}$, $\neg y$	1	0	1	0	X
	$\leftarrow$	1	0	1	1	
Отрицание x	$\bar{x}$, $\neg x$	1	1	0	0	y
Импликация	$\rightarrow$	1	1	0	1	
Штрих Шеффера	$\mid$	1	1	1	0	
Единица	1	1	1	1	1	x, y

Пример. Доказать с помощью таблиц истинности эквивалентность формул:

$$x \mid y = \bar{x} \vee \bar{y}.$$

Решение. Составим таблицу истинности (табл. 2.11)

Таблица 2.11

x	y	x | y	$\bar{x}$	$\bar{y}$	$\bar{x} \vee \bar{y}$
0	0	1	1	1	1
0	1	1	1	0	1
1	0	1	0	1	1
1	1	0	0	0	0

В таблице 2.11 совпадают для всех наборов *x*, *y* третий и шестой столбцы, т.е. формулы эквивалентны.

2.3. Эквивалентные преобразования

При преобразовании логических формул часто требуется получать новые формулы, эквивалентные данным. Корректность преобразований обеспечивается выполнением следующих правил:

1. *Правило подстановки* формулы *F* вместо переменной *x*.

При подстановке формулы *F* вместо переменной *x* все вхождения переменной *x* в исходное соотношение должны быть одновременно заменены формулой *F*. *Правило применяется к эквивалентным соотношениям для получения новых эквивалентных соотношений*.

2. *Правило замены* подформул. Если какая-либо формула *F*, описывающая функцию *f*, содержит F_1 в качестве подформулы, то замена F_1 на эквивалентную F_2 не изменит функции *f*; полученная при такой замене новая формула F' эквивалентна исходной *F*. *Правило замены подформул позволяет, используя известные эквивалентные соотношения, получать формулы, эквивалентные данной*.

Эквивалентные преобразования – преобразования, использующие эквивалентные соотношения и правила подстановки и замены.

Основные эквивалентные соотношения (равносильности):

1. Коммутативность конъюнкции: $x \& y = y \& x$. (2.1)

2. Коммутативность дизъюнкции: $x \vee y = y \vee x$. (2.2)

3. Ассоциативность конъюнкции: $(x \& y) \& z = x \& (y \& z) = x \& y \& z$. (2.3)

4. Ассоциативность дизъюнкции: $(x \vee y) \vee z = x \vee (y \vee z) = x \vee y \vee z$. (2.4)

5. Дистрибутивность конъюнкции относительно дизъюнкции:

$x \& (y \vee z) = (x \& y) \vee (x \& z)$. (2.5)

6. Дистрибутивность дизъюнкции относительно конъюнкции:

$x \vee (y \& z) = (x \vee y) \& (x \vee z)$. (2.6)

7. Идемпотентность конъюнкции: $x \& x = x$. (2.7)

8. Идемпотентность дизъюнкции: $x \vee x = x$. (2.8)

9. Закон противоречия: $x \& \overline{x} = 0$. (2.9)

10. Закон исключенного третьего: $x \vee \overline{x} = 1$. (2.10)

11. Свойства констант:

$x \& 1 = x,\ x \& 0 = 0,\ x \vee 1 = 1,\ x \vee 0 = x,\ \overline{0} = 1,\ \overline{1} = 0$. (2.11)

12. Снятие двойного отрицания: $\overline{\overline{x}} = x$. (2.12)

13. Правила де Моргана:

$\overline{x \& y} = \overline{x} \vee \overline{y},\ \overline{x \vee y} = \overline{x} \& \overline{y}$. (2.13)

14. Закон контрапозиции: $x \rightarrow y = \overline{y} \rightarrow \overline{x}$. (2.14)

15. $x \rightarrow y = \overline{x} \vee y$. (2.15)

16. $x \leftrightarrow y = (x \rightarrow y) \& (y \rightarrow x)$. (2.16)

Основные равносильности (4.1)-(4.16) отличаются тем, что:

- они не выводимы друг из друга;

- этих соотношений достаточно для выполнения любых эквивалентных преобразований.

Наряду с основными равносильностями, для *упрощения логических формул* часто используются следующие эквивалентные соотношения, выводимые из основных с помощью эквивалентных преобразований:

1. Поглощение: $x \vee x \& y = x, \; x \& (x \vee y) = x.$ (2.17)

2. Склеивание: $x \& y \vee x \& \bar{y} = x.$ (2.18)

3. Обобщенное склеивание:

$$x \& z \vee y \& \bar{z} \vee x \& y = x \& z \vee y \& \bar{z}. \quad (2.19)$$

4. $x \vee \bar{x} \& y = x \vee y.$ (2.20)

2.5. Формы представления булевых функций

Элементарной конъюнкцией называется конъюнкция переменных или их отрицаний, в которой каждая переменная встречается не более одного раза.

Элементарной дизъюнкцией называется дизъюнкция переменных или их отрицаний, в которой каждая переменная встречается не более одного раза.

Алгоритм построения булевой формулы по таблице истинности логической функции $f(x_1, \dots, x_n)$:

1. Определяют все наборы значений переменных $x_1, \dots, x_n$, на которых функция $f(x_1, \dots, x_n)$ равна *1*.

2. Для этих наборов выписываются конъюнкции всех переменных, над теми переменными, которые в наборах равны нулю, ставятся отрицания.

3. Все полученные элементарные конъюнкции соединяются между собой знаками дизъюнкции.

Полученная по данному алгоритму формула называется *совершенной дизъюнктивной нормальной формой (СДНФ)* логической функции $f(x_1, \dots, x_n)$.

Для каждой функции СДНФ *единственна* (с точностью до перестановок переменных и конъюнкций).

Пример. Логическую функцию трех переменных

$$f(x,y,z) = (x \leftrightarrow \overline{y}) \rightarrow ((x \vee z) \,\&\, y)$$

представить булевой формулой в виде СДНФ.

<u>*Решение.*</u> Восстановим для функции *f(x, y, z)* по ее формуле таблицу истинности (табл. 2.12).

Таблица 2.12

x	y	z	$\overline{y}$	$x \leftrightarrow \overline{y}$	$x \vee z$	$(x \vee z) \,\&\, y$	$(x \leftrightarrow \overline{y}) \rightarrow ((x \vee z) \,\&\, y)$
0	0	0	1	0	0	0	1
0	0	1	1	0	1	0	1
0	1	0	0	1	0	0	0
0	1	1	0	1	1	1	1
1	0	0	1	1	1	0	0
1	0	1	1	1	1	0	0
1	1	0	0	0	1	1	1
1	1	1	0	0	1	1	1

Искомая СДНФ логической функции *f(x, y, z)* равна

$$f(x,y,z) = \overline{x} \cdot \overline{y} \cdot \overline{z} \vee \overline{x} \cdot \overline{y} \cdot z \vee \overline{x} \cdot y \cdot z \vee x \cdot y \cdot \overline{z} \vee x \cdot y \cdot z\,.$$

<u>*Приведение к дизъюнктивной нормальной форме.*</u>

Дизъюнктивной нормальной формой (ДНФ) называется формула в виде дизъюнкций элементарных конъюнкций. Т.е., СДНФ – частный случай ДНФ, в которой каждая элементарная конъюнкция включает все переменные (с отрицаниями или без).

Алгоритм приведения к ДНФ заключается в следующем:

1. Все отрицания довести до отдельных переменных с помощью (2.12), (2.13).

2. Раскрыть скобки с помощью (2.3) – (2.6).

3. Удалить лишние конъюнкции и повторения переменных с помощью (2.7) – (2.10).

4. Удалить константы с помощью (2.11).

Процедура приведения ДНФ к СДНФ состоит в расщеплении (обратном склеивании) путем использования (2.18) в обратную сторону всех элементарных конъюнкций, которые содержат не все переменные.

<u>*Приведение к конъюнктивной нормальной форме.*</u>

Конъюнктивной нормальной формой (КНФ) называется конъюнкция элементарных дизъюнкций.

Пусть ДНФ F имеет вид

$F = k_1 \vee k_2 \vee \ldots \vee k_m$,

где $k_1, k_2, \ldots, k_m$ – элементарные конъюнкции.

Процедура приведения ДНФ к КНФ заключается в следующем:

1. Наложить на F двойное отрицание

$$F = \overline{\overline{k_1 \vee k_2 \vee \ldots \vee k_m}}$$

и привести $\overline{k_1 \vee k_2 \vee \ldots k_m}$ к ДНФ $k_1^{'} \vee k_2^{'} \vee \ldots \vee k_l^{'}$, где $k_1^{'}, k_2^{'}, \ldots, k_l^{'}$ – элементарные конъюнкции. Тогда

$$F = k_1 \vee k_2 \vee \ldots \vee k_m = \overline{\overline{k_1 \vee k_2 \vee \ldots \vee k_m}} = \overline{k_1^{'} \vee k_2^{'} \vee \ldots \vee k_l^{'}}\,.$$

2. С помощью правил де Моргана освободиться от второго отрицания и преобразовать отрицания элементарных конъюнкций в элементарные дизъюнкции $d_1, d_2, \ldots, d_l$. В результате получим

$$F = \overline{k_1^{'} \vee k_2^{'} \vee \ldots \vee k_l^{'}} = \overline{k_1^{'}} \cdot \overline{k_2^{'}} \cdot \ldots \cdot \overline{k_l^{'}} = d_1 \cdot d_2 \cdot \ldots \cdot d_l\,.$$

Совершенной КНФ (СКНФ) называется КНФ, каждая элементарная дизъюнкция которой содержит все переменные.

<u>*Пример.*</u> Привести к ДНФ и СДНФ формулу

$$f = x \cdot y \vee \bar{x} \cdot (y \vee x \cdot z) \cdot \overline{(x \cdot (\bar{y} \vee z) \vee y \cdot z)}\,.$$

<u>*Решение.*</u> Воспользуемся свойством дистрибутивности конъюнкции относительно дизъюнкции и правилом де Моргана:

$$f = x \cdot y \vee (\bar{x} \cdot y \vee \bar{x} \cdot x \cdot z) \cdot (\bar{x} \vee \overline{(\bar{y} \vee z)}) \cdot \overline{y \cdot z}\,.$$

Далее применим закон противоречия (2.9), свойства констант (2.11), правила де Моргана (2.13):

$$f = x \cdot y \vee \bar{x} \cdot y \cdot (\bar{x} \vee y \cdot \bar{z}) \cdot (\bar{y} \vee \bar{z})\,.$$

Раскрываем скобки:

$$f=x\cdot y\vee\bar{x}\cdot y\cdot(\bar{x}\cdot\bar{y}\vee y\cdot\bar{z}\cdot\bar{y}\vee\bar{x}\cdot\bar{z}\vee y\cdot\bar{z}\cdot\bar{z})=$$

$$=x\cdot y\vee\bar{x}\cdot y\cdot\bar{x}\cdot\bar{y}\vee\bar{x}\cdot y\cdot y\cdot\bar{z}\cdot\bar{y}\vee\bar{x}\cdot y\cdot\bar{x}\cdot\bar{z}\vee\bar{x}\cdot y\cdot y\cdot\bar{z}\cdot\bar{z}.$$

Снова используем закон противоречия (2.9), свойства констант (2.11) и идемпотентность конъюнкции (2.7):

$$f=x\cdot y\vee\bar{x}\cdot y\cdot\bar{z}.$$

Воспользуемся далее дистрибутивностью конъюнкции относительно дизъюнкции (2.5) и формулой (2.20) и получим ДНФ:

$$f=y\cdot(x\vee\bar{x}\cdot\bar{z})=y\cdot(x\vee\bar{z})=x\cdot y\vee y\cdot\bar{z}.$$

Полученную ДНФ приведем к СДНФ расщеплением (обратным склеиванием) по формуле (2.18) в обратную сторону всех элементарных конъюнкций, которые содержат не все переменные:

$$f=x\cdot y\vee y\cdot\bar{z}=x\cdot y\cdot 1\vee 1\cdot y\cdot\bar{z}=(x\cdot y\cdot(z\vee\bar{z}))\vee((x\vee\bar{x})\cdot y\cdot\bar{z})=$$

$$=x\cdot y\cdot z\vee x\cdot y\cdot\bar{z}\vee x\cdot y\cdot\bar{z}\vee\bar{x}\cdot y\cdot\bar{z}=x\cdot y\cdot z\vee x\cdot y\cdot\bar{z}\vee\bar{x}\cdot y\cdot\bar{z}.$$

<u>Пример.</u> Привести к КНФ и СКНФ формулу

$$f=x\cdot\bar{y}\vee\bar{x}\cdot y\vee x\cdot\bar{z}.$$

<u>Решение.</u> Наложим на исходную формулу двойное отрицание и, используя правило де Моргана, опустим одно отрицание на переменные:

$$f=\overline{\overline{x\cdot\bar{y}\vee\bar{x}\cdot y\vee x\cdot\bar{z}}}=\overline{(\bar{x}\vee y)\cdot(x\vee\bar{y})\cdot(\bar{x}\vee z)}=\overline{(\bar{x}\cdot x\vee y\cdot x\vee\bar{x}\cdot\bar{y}\vee y\cdot\bar{y})\cdot(\bar{x}\vee z)}$$

.Воспользовавшись законом противоречия (2.9), получим:

$$f=\overline{(y\cdot x\vee\bar{x}\cdot\bar{y})\cdot(\bar{x}\vee z)}.$$

Раскрывая скобки и снова используя законом противоречия (2.9) и идемпотентность конъюнкции (2.7), получим:

$$f=\overline{y\cdot x\cdot\bar{x}\vee\bar{x}\cdot\bar{y}\cdot\bar{x}\vee y\cdot x\cdot z\vee\bar{x}\cdot\bar{y}\cdot z}=\overline{\bar{x}\cdot\bar{y}\vee\bar{x}\cdot\bar{y}\cdot z\vee y\cdot x\cdot z}.$$

Используя свойство поглощения (4.17), имеем:

$$f=\overline{\bar{x}\cdot\bar{y}\vee x\cdot y\cdot z}.$$

Далее, применяя правило де Моргана, «опустим» отрицание на переменные и получим КНФ:

$$f=\overline{(\bar{x}\cdot\bar{y})}\cdot\overline{(x\cdot y\cdot z)}=(x\vee y)\cdot(\bar{x}\vee\bar{y}\vee\bar{z}).$$

Преобразуем КНФ к СКНФ. Для этого достаточно преобразовать выражение в скобках *$(x \vee y)$*. Используем закон противоречия (2.9), свойства констант (2.11) и дистрибутивность дизъюнкции относительно конъюнкции (2.6):

$$f = (x \vee y \vee 0) \cdot (\bar{x} \vee \bar{y} \vee \bar{z}) = (x \vee y \vee z \cdot \bar{z}) \cdot (\bar{x} \vee \bar{y} \vee \bar{z}) =$$

$$= (x \vee y \vee z) \cdot (x \vee y \vee \bar{z}) \cdot (\bar{x} \vee \bar{y} \vee \bar{z})\,.$$

Тема 3. Элементы комбинаторики

3.1. Основные понятия комбинаторики

3.1.1. Основной принцип комбинаторики

На практике часто приходится выбирать из некоторого множества объектов подмножества элементов, обладающих теми или иными свойствами, располагать элементы одного или нескольких множеств в определенном порядке и т. д. Поскольку в таких задачах речь идет о тех или иных комбинациях объектов, их называют "комбинаторные задачи".

Комбинаторика занимается различного рода соединениями, которые можно образовать из элементов некоторого конечного множества. Термин "комбинаторика" происходит от латинского combina - сочетать, соединять.

Комбинаторика - область математики, изучающая комбинации и перестановки различных объектов.

Все разнообразие комбинаторных формул может быть выведено из двух основных утверждений, касающихся конечных множеств – правило суммы и правило произведения.

Правило суммы: пусть имеется n попарно непересекающихся множеств A_1, A_2, …, A_n, содержащих m_1, m_2, …, m_n элементов соответственно. Число способов, которыми можно выбрать один элемент из всех этих множеств, равно $m_1 + m_2 + \ldots + m_n$.

То есть, если на первой полке стоит X книг, а на второй Y, то выбрать книгу из первой или второй полки, можно X+Y способами.

Пример: Студент должен выполнить практическую работу по математике. Ему предложили на выбор 17 тем по алгебре и 13 тем по геометрии. Сколькими способами он может выбрать одну тему для практической работы?

Решение: $m_1=17$, $m_2=13$. По правилу суммы $A_1 U A_2=17+13=30$ тем.

Кортеж - конечная последовательность (допускающая повторения) элементов какого-нибудь множества.

Правило произведения (Основной принцип комбинаторики): пусть имеется n множеств A_1, A_2, …, A_n содержащих m_1, m_2, …, m_n элементов соответственно. Число способов, которыми можно выбрать по одному элементу из каждого множества, т.е. построить кортеж $(a_1,a_2,...,a_n)$, где $a_i A \in_{i1}$ (i = 1, 2, …, n), равно $m_1 \cdot m_2 \cdot \ldots \cdot m_n$.

То есть, если на первой полке стоит X книг, а на второй Y, то выбрать одну книгу с первой полки и одну со второй можно X*Y способами.

Пример: сколько существует пятизначных чисел, которые одинаково читаются слева направо и справа налево?

Решение: В таких числах последняя цифра будет такая же, как и первая, а предпоследняя - как и вторая. Третья цифра будет любой. Это можно представить в виде XYZYX, где Y и Z -любые цифры, а X - не ноль. Значит по правилу произведения количество цифр одинаково читающихся как слева направо, так и справа налево равно 9*10*10=900 вариантов.

3.1.2. Размещения

Размещения с повторениями

Определим число всех отображений множества $A, |A| = m$, в множество $B, |B| = n$. Каждое такое отображение можно задать в виде таблицы:

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \ldots & a_m \\ b_{i_1} & b_{i_2} & \ldots & b_{i_m} \end{pmatrix}.$$

Поскольку верхняя строка фиксирована, то отображение определяется нижней строкой, т.е. кортежем элементов множества B размерности m.
Каждый элемент кортежа, поскольку допускаются любые повторения элементов, может быть выбран n способами; следовательно, число таких кортежей (и, стало быть, число всех отображений множества A в множество
B) составит n^m. Это число называется в комбинаторике *числом размещений с повторениями из* n *элементов по* m и обозначается $\tilde{A}_n^m$.

Содержательно это можно представить действительно как размещение элементов второго множества по «ячейкам», которые являются элементами первого множества.

Размещения без повторений

Чтобы элементы можно было разместить по «ячейкам» без повторений, число «ячеек» должно быть не больше числа размещаемых элементов: $m \le n$.

Определить число m-компонентных кортежей без повторений на n-элементном множестве можно, исходя из следующих соображений: в кортеже $(b_{i_1}, b_{i_2}, ..., b_{i_m})$ первую компоненту можно выбрать n способами, вторую – уже $n-1$ способами, третью - $n-2$, …, последнюю, m-ую – числом способов, равным $n-m+1$. Итак, искомое число, обозначаемое в комбинаторике A_n^m составит

$$A_n^m = n(n-1)(n-2)...(n-m+1).$$

Это и есть *число размещений без повторений*. Нетрудно понять, что оно равно также *числу инъекций* из множества A в множество B.

Выражение для A_n^m можно преобразовать следующим образом:

$$A_n^m = n(n-1)(n-2)...(n-m+1) = \frac{n!}{(n-m)!}.$$

Заметим, что при $m = 0$ получаем единственный 0-компонентный, т.е. *пустой кортеж*.

С другой стороны, при $m = n$ получим *число биекций* из A в B, равное $n!$. Это же число *перестановок* (биекций на себя) n-элементного множества.

3.1.3. Перестановки

Перестановками из n элементов называются размещения из этих n элементов по n, различающихся только порядком. Перестановки - частный случай размещений. Обозначаются P_n.

Перестановки без повторений (n различных элементов):

$$P_n = n!.$$

Доказательство: В формуле (1) положим $m = n$: $P_n A_n^n = \frac{n!}{(n-n)!} = \frac{n!}{0!} = n!$, ч.т.д.

Перестановки с повторениями (k различных элементов, где элементы могут повторяться $m_1, m_2, \ldots, m_k$ раз и $m_1 + m_2 + \ldots + m_k = n$, где n - общее количество элементов):

$$P_n(m_1, m_2, ..., m_k) = \frac{n!}{m_1! \cdot m_2! \cdot ... \cdot m_k!}.$$

3.1.4. Сочетания

Сочетания без повторений

Если в конкретном размещении без повторений, т.е. в m-компонентном кортеже без повторений на n-элементном множестве игнорировать порядок элементов, принимая во внимание только их состав, то получится не что иное как некоторое подмножество из m элементов множества из n элементов. Число таких подмножеств будет в $m!$ раз меньше числа кортежей (все перестановки элементов кортежа отождествляются!) и составит

$$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}.$$

Это число называется *числом сочетаний без повторений* из n элементов по m. Оно равно *числу всех m-элементных подмножеств n-элементного множества*.

Поскольку число всех подмножеств n-элементного множества равно 2^n, то получим такую формулу:

$$\sum_{k=0}^{n} C_n^k = 2^n.$$

Очевидно также, что $C_n^m = C_n^{n-m}$.

Сочетания с повторениями

Пусть дано n-элементное множество $A = \{a_1, a_2, ...a_n\}$, элементы которого договоримся называть *типами* (или *сортами*). Фиксировав произвольно число m, рассмотрим всевозможные неупорядоченные m-выборки

$$\{\underbrace{a_1, ..., a_1}_{m_1}, \underbrace{a_2, ..., a_2}_{m_2}, ..., \underbrace{a_n, ..., a_n}_{m_n}\}.$$

Каждая такая выборка содержит m_1 элементов сорта a_1, m_2 элементов сорта a_2,…, m_n элементов сорта a_n так, что $m_1 + m_2 + ... + m_n = m$, и называется *сочетанием из n элементов по m с повторениями*. Число таких сочетаний обозначается $\tilde{C}_n^m$.

Можно показать, что

$$\tilde{C}_n^m = C_{n+m-1}^m = \frac{(n+m-1)!}{m!(n-1)!}$$

Действительно, это будет число способов, которым можно $n-1$ «перегородками» разделить элементы разных сортов, т.е. выбрать $n-1$ место среди $m+n-1$ мест. Это будет число $C_{m+n-1}^{n-1} = C_{m+n-1}^{m}$. Нетрудно понять, что это будет и число способов, которыми число m можно представить в виде суммы неотрицательных слагаемых, т.е. число всех различных (неотрицательных) решений уравнения $x_1 + ... + x_n = m$.

Например, при n = 3, m = 5 имеем $\tilde{C}_3^5 = C_7^5 = 21$ решение. Конкретно:

{0,0, 5} – 3 решения, из которых два нулевых; {0, 1, 4} – 6 решений, из которых одно нулевое (на каждую из трех возможных позиций нулевого решения приходится две перестановки остальных); {0, 2, 3} – 6 решений; {1, 2, 2} – 3 решения (3 возможных позиции единицы); {1, 1, 3} – 3 решения.

3.2. Полиномиальная формула. Комбинаторные тождества

Бином Ньютона - это формула, выражающая выражение $(a+b)^n$ в виде многочлена. Эта формула имеет вид:

$$(a+b)^n = a^n + C_n^1 a^{n-1} b + C_n^2 a^{n-2} b^2 + \ldots + b^n = \sum_{i=0}^{n} C_n^i a^{n-i} b^i$$

C_n^k - число <u>сочетаний</u> из n элементов по k. $C_n^k = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$.

Широко известные формулы сокращенного умножения квадрата суммы и разности, куба суммы и разности, являются частными случаями бинома Ньютона.

Этот треугольник имеет вид:

1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1
1 6 15 20 15 6 1
1 7 21 35 35 21 7 1
1 8 28 56 70 56 28 8 1

Формула бинома Ньютона может быть обобщена для произвольного числа слагаемых.

$$(a_1+a_2+\ldots+a_k)^n = \sum \frac{n!}{n_1!n_2!\ldots n_k!} a_1^{n_1} a_2^{n_2} \ldots a_k^{n_k} \quad n_1+n_2+\ldots+n_k = n$$

При вычислениях 0! принимается равным 1.

Арифметический *треугольник Паскаля* образует бесконечная числовая таблица, составленная из биномиальных коэффициентов. Ее строки упорядочены по степеням биномов сверху вниз. В каждой строке биномиальные коэффициенты расположены по возрастанию верхних индексов соответствующих чисел сочетаний слева направо. Треугольник Паскаля принято записывать в равнобедренном или в прямоугольном формате.

Наиболее наглядным и распространенным является равнобедренный формат, где биномиальные коэффициенты, располагаясь в шахматном порядке, образуют бесконечный равнобедренный треугольник. Его начальный фрагмент для биномов до степени n=4 имеет следующий вид:

$$C_0^0=1$$

$$C_1^0=1 \qquad C_1^1=1$$

$$C_2^0=1 \qquad C_2^1=2 \qquad C_2^2=1$$

$$C_3^0=1 \qquad C_3^1=3 \qquad C_3^2=3 \qquad C_3^3=1$$

$$C_4^0=1 \qquad C_4^1=4 \qquad C_4^2=6 \qquad C_4^3=1 \qquad C_4^4=1$$

В общем случае равнобедренный треугольник Паскаля предоставляет удобное геометрического правило определения биномиальных коэффициентов, которое основано на тождествах сложения и симметрии чисел сочетаний. В частности, в соответствии с тождеством сложения любой биномиальный коэффициент является суммой двух ближайших к нему коэффициентов предыдущей строки. Это правило иллюстрирует сложение и его результат для подчеркнутых коэффициентов рассмотренного выше равнобедренного треугольника Паскаля. В соответствии с тождеством симметрии равнобедренный треугольник Паскаля симметричен относительно своей биссектрисы. Таким образом, каждая его строка является числовым палиндромом из биномиальных коэффициентов. Свойство палиндрома можно проследить для любой строки рассмотренного выше фрагмента равнобедренного треугольника Паскаля, если прочитать ее коэффициенты слева направо и справа налево. Указанные алгебраические и геометрические особенности позволяют расширять равнобедренный треугольник Паскаля и последовательно находить значения биномиальных коэффициентов произвольных степеней.

Однако для изучения различных свойств треугольника Паскаля удобнее применять формально более строгий прямоугольный формат. В этом формате его задает нижняя треугольная матрица биномиальных коэффициентов, где они образуют бесконечный прямоугольный треугольник. Начальный фрагмент прямоугольного треугольника Паскаля для биномов до степени n=9 имеет следующий вид:

n	C_n^0	C_n^1	C_n^2	C_n^3	C_n^4	C_n^5	C_n^6	C_n^7	C_n^8	C_n^9	...
0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	...
1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	...
2	1	2	1	0	0	0	0	0	0	0	...
3	1	3	3	1	0	0	0	0	0	0	...
4	1	4	6	4	1	0	0	0	0	0	...
5	1	5	10	10	5	1	0	0	0	0	...
6	1	6	15	20	15	6	1	0	0	0	...
7	1	7	21	35	35	21	7	1	0	0	...
8	1	8	28	56	70	56	28	8	1	0	...
9	1	9	36	84	126	126	84	36	9	1	...
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...

Геометрически такая прямоугольная таблица получается путем горизонтальной деформации равнобедренного треугольника Паскаля. В результате числовые ряды, параллельные боковым сторонам равнобедренного треугольника Паскаля, превращаются в вертикали и диагонали прямоугольного треугольника Паскаля, а горизонтали обоих треугольников совпадают. При этом сохраняют справедливость правила сложения и симметрии биномиальных коэффициентов, хотя прямоугольный треугольник Паскаля теряет визуальную симметричность, свойственную его равнобедренному аналогу. В качестве компенсации становится более удобным формальный анализ разнообразных числовых свойств биномиальных коэффициентов для горизонталей, вертикалей и диагоналей прямоугольного треугольника Паскаля.

Начиная анализ горизонталей прямоугольного треугольника Паскаля, несложно заметить, что сумма элементов любой строки с номером n равна 2n в соответствии с формулой суммирования биномиальных по верхнему индексу. Из этого следует, что сумма элементов над любой из горизонталей с номером n равна (2n-1). Этот результат становится вполне очевидным, если значение суммы элементов каждой горизонтали записать в двоичной системе счисления. Например, для n=4 такое сложение можно записать следующим образом:

$(1_2 = 2^0) + (10_2 = 2^1) + (100_2 = 2^2) + (1000_2 = 2^3) = (1111_2 = 2^4 - 1)$.

Вот еще пара интересных свойств горизонталей, которые также связаны со степенью двойки. Оказывается, что если номер горизонтали равен степени двойки ($n=2^k$), то все ее внутренние элементы (то есть кроме крайних единиц) являются четными числами. Наоборот, все числа горизонтали будут нечетными, если ее номер на единицу меньше степени двойки ($n=2^k-1$). В справедливости этих свойств можно убедиться проверкой четности внутренних биномиальных коэффициентов, например, в горизонталях n=4 и n=3 или n=8 и n=7.

Пусть теперь номер строки прямоугольного треугольника Паскаля есть простое число p. Тогда все ее внутренние биномиальные коэффициенты должны делиться на p. Это свойство несложно проверить для малых значений простых номеров горизонталей. Например, все внутренние биномиальные коэффициенты пятой горизонтали (5, 10 и 5), очевидно, делятся на 5. Чтобы доказать справедливость этого результата для любого простого номера горизонтали n=p, нужно записать мультипликативную формулу ее биномиальных коэффициентов, отделив наибольший множитель числителя p следующим образом:

$$\text{Cmn}=p\left[\frac{(p-1)(p-2)\ldots\ (p-m+1)}{m!}\right],\ 0 < m < p$$

Поскольку p есть простое число и, следовательно, не делится на m!, то произведение остальных сомножителей числителя этой формулы обязано делиться на m!, чтобы гарантировать целое значение биномиального коэффициента. Отсюда следует, что отношение в квадратных скобках является натуральным числом N и искомый результат становится очевидным. В нотации теории чисел это свойство можно записать следующим образом:

Cmn = pN = 0 (mod 1) −>Cmp = 0 (mod p) , 0 < m < p .

Используя этот результат, можно установить, что номера всех горизонталей треугольника Паскаля, внутренние элементы которых делятся на заданное простое число p, являются степенью p, то есть имеют вид $n=p^k$. В частности, если $p=3$, то простое число p делит не только все внутренние элементы строки 3, как было установлено выше, но, например, девятой ($n=9$) горизонтали (9,36, 84 и 126). С другой стороны, в треугольнике Паскаля нельзя найти горизонталь, все внутренние элементы которой делятся на составное число. В противном случае номер такой горизонтали обязан быть одновременно степенью простых делителей составного числа, на которое делятся все ее внутренние элементы, но это по очевидным причинам невозможно.

Рассмотренные соображения позволяют сформулировать следующий общий признак делимости горизонтальных элементов треугольника Паскаля. Наибольший общий делитель (НОД) всех внутренних элементов любой горизонтали треугольника Паскаля с номером n равен простому числу p, если $n=p^k$ или 1 во всех остальных случаях:

$$\text{НОД}(Cmn)=\begin{cases} p, \text{ если } n = p^k \\ 1, \text{ если } n \neq p^k \end{cases} \text{ для любых } 0 < m < n$$

В заключение анализа горизонталей стоит рассмотреть еще одно любопытное свойство, которым обладают образующие их ряды биномиальных коэффициентов. Если биномиальные коэффициенты любой горизонтали с номером n умножить на последовательные степени числа 10, а затем сложить все эти произведения, то получится 11^n. Формальным обоснованием этого результата является подстановка значений $X=10$ и $Y=1$ (или $Z=1$) в формулу бинома Ньютона. Следующий численный пример иллюстрирует выполнение этого свойства при $n=5$:

$$1\cdot10^0 + 5\cdot10^1 + 10\cdot10^2 + 10\cdot10^3 + 5\cdot10^4 + 1\cdot10^5 = (10 + 1)^5 = 11^5$$

Анализ свойств вертикалей прямоугольного треугольника Паскаля можно начать с изучения индивидуальных особенностей составляющих их элементов. Формально каждую вертикаль m треугольника Паскаля образует следующая бесконечная последовательность биномиальных коэффициентов с постоянным верхним индексом (m) и инкрементом нижнего индекса:

$$V_m=<Cm0, Cm1, Cm2, ... Cmn, Cmn+1 , ...>$$

Очевидно, при $m=0$ получается последовательность единиц, а при $m=1$ образуется ряд натуральных чисел. При $m=2$ вертикаль составляют треугольные числа. Каждое *треугольное число* можно изобразить на плоскости в виде равностороннего треугольника, который заполняют произвольные объекты (ядра), расположенные в шахматном порядке.

Следует отметить, что аналогичным образом можно ввести в рассмотрение *квадратные числа* S_k, которые получаются возведением в квадрат натуральных чисел k и, вообще, многоугольные *фигурные числа*, образованные регулярным заполнением правильных многоугольников.

Возвращаясь к анализу вертикалей треугольника Паскаля, можно отметить, что следующую вертикаль при m=3 заполняют тетраэдальные (пирамидальные) числа. Каждое такое число P_k задает количество ядер, которое можно расположить в форме тетраэдра, а индекс определяет, сколько горизонтальных треугольных слоев из рядов ядер требуется для его изображения в трехмерном пространстве. При этом все горизонтальные слои должны представляться как последовательные треугольные числа. Элементы следующих вертикалей треугольника Паскаля при m>3 образуют ряды гипертетраэдальных чисел, которые не имеют никакой наглядной геометрической интерпретации на плоскости или в трехмерном пространстве, но формально соответствуют многомерным аналогам треугольных и тетраэдальных чисел.

Хотя вертикальные числовые ряды треугольника Паскаля имеют рассмотренные индивидуальные фигурные особенности, но для них можно одинаковым образом вычислять частичные суммы значений начальных элементов, используя формулу суммирования чисел сочетаний по нижнему индексу. В треугольнике Паскаля эта формула имеет следующую геометрическую интерпретацию. Сумма значений n верхних биномиальных коэффициентов любой вертикали равна значению элемента следующей вертикали, который расположен на одну строку ниже. Этот результат также соответствует геометрической структуре треугольных, тетраэдальных и гипертетраэдальных чисел, поскольку представление каждого такого числа состоит из ядерных слоев, которые изображают числа более низкого порядка. В частности, n-е треугольное число T_n можно получить, суммируя все натуральные числа, изображающие его линейные слои:

(C11 = 1) + (C12 = 2) + (C13 = 3) + (C14 = 4) + ... + (C1n = n) = C2n+1 = T_n = n(n + 1)2

Аналогичным образом несложно найти тетраэдальное число P_n, вычислив следующую сумму n первых <u>треугольных чисел</u>, которые составляют его горизонтальные ядерные слои:

(T_1 = C22 = 1) + (T_2 = C23 = 3) + (T_3 = C24 = 6) + ... + (T_n = C2n+1 = n(n + 1)2) = C3n+2 = P_n = n(n + 1)(n + 2)6

Помимо горизонталей и вертикалей в прямоугольном треугольнике Паскаля можно проследить диагональные ряды элементов, изучение свойств которых также представляет определенный интерес. При этом обычно различают нисходящие и восходящие диагонали. Нисходящие диагонали параллельны гипотенузе прямоугольного треугольника Паскаля. Их образуют ряды биномиальных коэффициентов с инкрементом обоих индексов. В силу тождества симметрии нисходящие диагонали совпадают по значениям своих элементов с соответствующими вертикальными рядами треугольника Паскаля и поэтому повторяют все их свойства, рассмотренные выше. Указанное соответствие можно проследить по совпадению значений элементов каждой нисходящей диагонали и вертикали с любым номером n, если не учитывать вертикальные нули:

$d_n =< C0n; C1n+1; C2n+2; \ldots Ckn+k; \ldots. > \sim V_n = < Cnn; Cnn+1; Cnn+2; \ldots Cnn+k; \ldots>$

Восходящие диагонали образуют числовые ряды, геометрически перпендикулярные гипотенузе прямоугольного треугольника Паскаля. Они заполнены биномиальными коэффициентами с декрементом нижнего и инкрементом верхнего индексов. В частности, 7 верхних восходящих диагоналей образуют следующие числовые последовательность без учета хвостовых нулей:

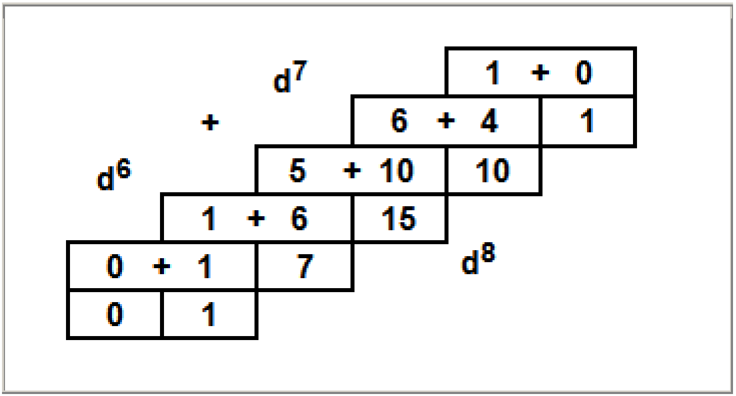
$<1>_1; <1>_2; <1, 2>_3; <1, 3, 1>_4; <1, 4, 3>_5; <1, 5, 6, 1>_6; <1, 6, 10, 4>_7$

В общем случае на любой восходящей диагонали с номером n стоят следующие биномиальные коэффициенты, сумма индексов каждого из которых равна (n-1):

$d^n = <C0n-1; C1n-2; C2n-3; \ldots Cmn-m-1; \ldots Cn-10>$

В силу тождества сложения для чисел сочетаний каждый диагональный элемент равен сумме двух соответствующих по индексам элементов из двух предыдущих восходящих диагоналей. Это позволяет строить каждую следующую восходящую диагональ попарным суммированием соседних горизонтальных элементов из двух предыдущих диагоналей, бесконечно расширяя треугольник Паскаля по диагонали.

Следующий фрагмент треугольника Паскаля иллюстрирует построение восходящей диагонали с номером 8 по диагоналям с номерами 6 и 7:



При таком способе построения сумма элементов любой восходящей диагонали, начиная с 3-й, будет равна сумме элементов двух предыдущих восходящих диагоналей, а первые 2 диагонали состоят только из одного элемента, значение которого равно 1. Результаты соответствующих вычислений образуют следующий числовой ряд, по которому можно проверить справедливость рассмотренного свойства восходящих диагоналей прямоугольного треугольника Паскаля:

1; 1; 2 = (1 + 1); 3 = (1 + 2); 5 = (2 + 3); 8 = (3 + 5); 13 = (5 + 8); 21 = (8 + 13); …

Анализируя эти числа, можно заметить, что по аналогичному закону образуется хорошо известная *последовательность чисел Фибоначчи*, где каждое очередное число равно сумме двух предыдущих, а два первых числа равны 1:

$F_1 = F_2 = 1;\ F_{n+2} = F_n + F_{n+1}$.

Таким образом, можно сделать следующий важный вывод: диагональные суммы элементов треугольника Паскаля составляют последовательность Фибоначчи. Это свойство позволяет установить еще одну интересную особенность треугольника Паскаля. Раскрывая рекурсивно формулу Фибоначчи, несложно доказать, что сумма первых n чисел Фибоначчи равна $(F_{n+2}-1)$. Поэтому сумма биномиальных коэффициентов, которые заполняют верхние n диагоналей, также равна $(F_{n+2}-1)$. Отсюда следует, что сумма n первых диагоналей треугольника Паскаля на 1 меньше суммы биномиальных коэффициентов, стоящих на его диагонали с номером (n+2).

В заключение следует отметить, что рассмотренные свойства треугольника Паскаля далеко не исчерпывают огромное разнообразие возможностей, которые связывают воедино различные математические аспекты, на первый взгляд не имеющие ничего общего. Столь необычные свойства позволяют считать треугольник Паскаля одной из наиболее совершенных числовых систем, все многообразные возможности которой нельзя перечислить и трудно переоценить.

3.3. Разбиения. Методы сведения одних комбинаторных конфигураций к другим

3.3.1. Разбиения

Разбиение конечного множества образует любое семейство непустых и непересекающихся подмножеств его элементов, обычно называемых классами, когда каждый элемент является представителем своего класса. Каждый класс однозначно определяет состав его элементов, а порядок перечисления классов разбиений и элементов классов не имеет значения. Различными считаются разбиения, которые отличаются числом классов или составом хотя бы двух классов. Например, существует всего 5 различных разбиений трехэлементного множества {X,Y,Z} на классы. Эти разбиения перечислены ниже в таком порядке, когда число их классов не убывает:

{ {X,Y,Z} }; { {X,Y}, {Z} }; { {X,Z}, {Y} }; { {X}, {Y,Z} }; { {X}, {Y},{Z} }.

Если зафиксировать количество классов, то в общем случае число разбиений множества из n элементов на m классов при любых $n \geq m \geq 0$ оказывается соответствующим по значениям для *чисел Стирлинга второго рода*. Формально эти числа определяют коэффициенты разложения степени n произвольной переменной Z по убывающим m-факториалам от Z при всех целых значениях m от 0 до n:

$$Z^n = \left\{ {n \atop 0} \right\} (Z)_0 + \left\{ {n \atop 1} \right\} (Z)_1 + \ldots + \left\{ {n \atop m} \right\} (Z)_m + \ldots + \left\{ {n \atop n} \right\} (Z)_n.$$

В этом разложении фигурные коэффициенты обозначают числа Стирлинга второго рода, а убывающие факториалы, перед которыми они стоят, определяют следующие произведения:

$$(Z)_m = Z(Z-1)(Z-2) \ldots (Z-m+1).$$

Учитывая выражение для убывающих факториалов, указанное разложение, например при n=3 можно записать следующим образом:

$$Z^3 = \left\{ {3 \atop 0} \right\} + \left\{ {3 \atop 1} \right\} Z + \left\{ {3 \atop 2} \right\} Z(Z - 1) + \left\{ {3 \atop 3} \right\} Z(Z - 1)(Z - 2).$$

Равенство левой и правой частей этого разложения, очевидно, будет достигнуто при следующих значениях коэффициентов, заданных соответствующими числами Стирлинга второго рода:

$$\left\{ {3 \atop 0} \right\} = 0; \left\{ {3 \atop 1} \right\} = 1; \left\{ {3 \atop 2} \right\} = 3; \left\{ {3 \atop 3} \right\} = 1;$$

В общем случае значения чисел Стирлинга второго рода $\left\{ {n \atop m} \right\}$ при любых целых величинах $n \geq m \geq 0$ можно записать в форме бесконечной нижнетреугольной матрицы, которая называется *треугольником Стирлинга второго рода*. Его начальный фрагмент, например, при $0 \le n,m \le 8$ можно представить следующей таблицей:

n	$\left[{n \atop 0}\right]$	$\left[{n \atop 1}\right]$	$\left[{n \atop 2}\right]$	$\left[{n \atop 3}\right]$	$\left[{n \atop 4}\right]$	$\left[{n \atop 5}\right]$	$\left[{n \atop 6}\right]$	$\left[{n \atop 7}\right]$	$\left[{n \atop 8}\right]$	...
0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	...
1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	...
2	0	1	1	0	0	0	0	0	0	...
3	0	1	3	1	0	0	0	0	0	...
4	0	1	7	6	1	0	0	0	0	...
5	0	1	15	25	10	1	0	0	0	...
6	0	1	31	90	65	15	1	0	0	...
7	0	1	63	301	350	140	21	1	0	...
8	0	1	127	966	1701	1050	266	28	1	...
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...

По своей структуре эта таблица похожа на треугольник Паскаля. Ее внутренние элементы определяются по следующему мнемоническому правилу. Каждое число в любой строке $n>0$ и столбце $m>0$ равно сумме числа слева над ним и непосредственно над ним, которое умножено на m. Это правило иллюстрирует следующий пример для $n=3$ и $m=2$:

$$\left\{{3 \atop 2}\right\} = \left\{{2 \atop 1}\right\} + 2\left\{{2 \atop 2}\right\} = 1 + 2 \cdot 1 = 3.$$

В общем случае данное правило формально отражает следующее рекуррентное соотношение, которое справедливо для любых натуральных значений $n \ge m > 0$:

$$\left\{{n \atop m}\right\} = \left\{{n-1 \atop m-1}\right\} + m\left\{{n-1 \atop m}\right\}$$

Граничные условия для этого рекуррентного соотношения определяют следующие значения чисел Стирлинга второго рода при $m=0$ и $m=n$:

$$\left\{{n>0 \atop 0}\right\} = 0; \left\{{0 \atop 0}\right\} = 1; \left\{{n \atop n}\right\} = 1.$$

Следующий пример показывает использование рекуррентного соотношения и его граничных условий для рекурсивного вычисления значения числа Стирлинга второго рода при $n=3$ и $m=2$:

$\left\{ {3 \atop 2} \right\} = \left\{ {2 \atop 1} \right\} + 2\left\{ {2 \atop 2} \right\} = \left\{ {1 \atop 0} \right\} + \left\{ {1 \atop 1} \right\} + 2\left\{ {2 \atop 2} \right\} = 0 + 1 + 2 \cdot 1 = 3.$

Для рекурсивного вычисления значений чисел Стирлинга второго рода при больших величинах n и m также могут быть полезны следующие тождества:

$\left\{ {n \atop n-1} \right\} = \binom{n}{2} = n(n - 1)2$ и $\left\{ {n \atop 2} \right\} = 2^{n-1} - 1.$

Следующий пример показывает, как с их помощью найти значение числа Стирлинга второго рода при n=6 и m=4 более коротким путем, чем по базовому рекуррентному соотношению:

$\left\{ {6 \atop 4} \right\} = \left\{ {5 \atop 3} \right\} + 4\left\{ {5 \atop 4} \right\} = \left\{ {4 \atop 2} \right\} + 3\left\{ {4 \atop 3} \right\} + 4\left\{ {5 \atop 4} \right\} = (2^{4-1} - 1) + 34(4 - 1)2 + 45(5 -1)2 = 65.$

Как отмечалось выше, числа Стирлинга второго рода дают мощность множества разбиений n элементов на фиксированное число классов $m \leq n$. Общее число всех разбиений n элементов без ограничения по числу классов определяется числом Белла, значение которого равно следующей сумме чисел Стирлинга второго рода:

$B_n = \left\{ {n \atop 1} \right\} + \ldots + \left\{ {n \atop m} \right\} + \ldots + \left\{ {n \atop n} \right\}$

Принимая величину $B_0 = 1$, для вычисления значений чисел Белла можно использовать также следующую рекуррентную зависимость с биномиальными коэффициентами:

$B_n = \binom{n}{0} B_0 + \binom{n}{1} B_1 + \ldots + \binom{n}{m} B_k + \ldots + \binom{n}{n} B_n$

Результаты рекуррентных вычислений чисел Белла для всех значений n от 0 до 10 приведены в следующей таблице:

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
B_n	1	1	2	5	15	52	203	877	4140	21147	115975

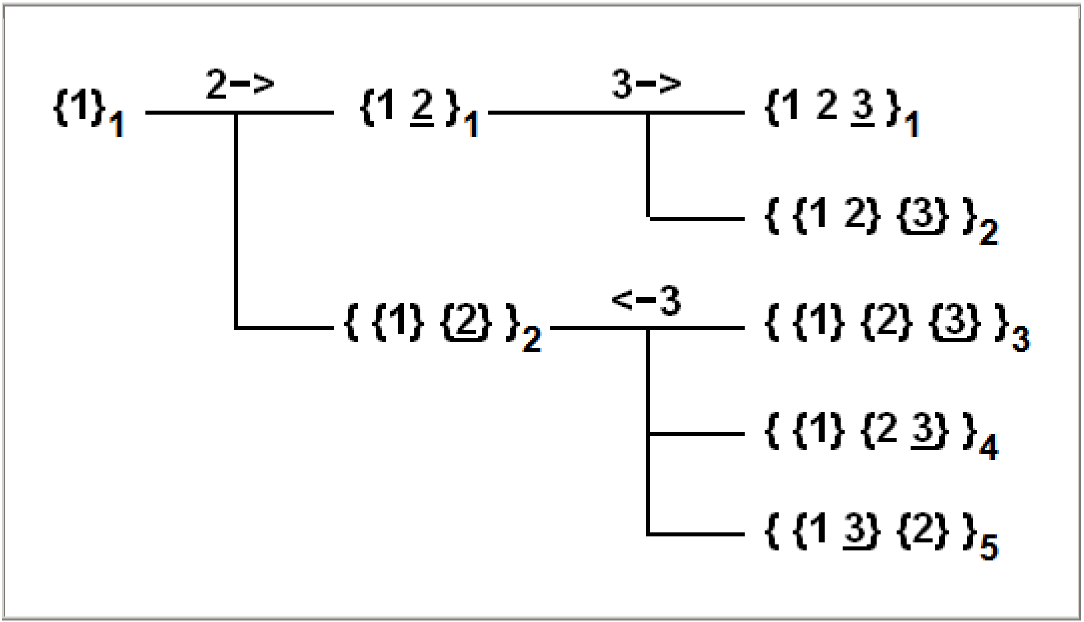
Из таблицы значений чисел Белла следует, что мощность множества разбиений быстро растет с увеличением количества элементов. Поэтому для решения разнообразных практических задач необходимо иметь комбинаторные алгоритмы, которые обеспечивают систематический перебор разбиений конечных множеств элементов любой мощности. По ряду причин перебор разбиений целесообразно производить в порядке минимального изменения состава их классов, когда любые 2 последовательных разбиения отличаются расположением только одного элемента в их классах. Очевидно, такое изменение следует считать минимальным. Например, в следующей последовательности все 5 разбиений множества {X,Y,Z} перечислены в порядке минимального изменения, а элементы, которые при этом переходят в другой класс, выделены подчеркиванием:

{ {X,Y,<u>Z</u>} }; { {X,<u>Y</u>}, {Z} }; { {X}, {Y}, {<u>Z</u>} }; { {X} {Y,<u>Z</u>} }; { {X,Z} {Y} }.

Для генерации разбиений в порядке минимального изменения были разработаны рекурсивный и итерационный алгоритмы, которые напоминают аналогичные методы транспозиции смежных элементов для перестановок. Они ориентированы на обработку любого множества натуральных чисел от 1 до n и обеспечивают систематическое перечисление всех его разбиений в порядке минимального изменения. При этом классы разбиений обычно упорядочивают по возрастанию величин своих минимальных элементов. С учетом указанного порядка перечисления классов, последовательность разбиений, например, числового множества {1,2,3}, которую формируют алгоритмы минимального изменения, имеет следующий вид:

{ {1,2,3} }; { {1,2}, {3} }; { {1}, {2}, {3} }; { {1} {2,3} }; { {1,3} {2} }.

В *рекурсивном алгоритме минимального изменения* такая последовательность, в общем случае, строится по следующему рекуррентному правилу. Пусть уже получен список всех разбиений множества из (n−1) натуральных чисел от 1 до (n−1), где классы упорядочены по возрастанию своих наименьших элементов, а любые последовательные разбиения минимально различны, в указанном выше смысле. Каждое разбиение этого списка дополняется одноэлементным классом {n}, а его классы дополняются элементом n. Причем указанные дополнения для нечетных по номеру разбиений производятся в порядке возрастания минимальных элементов классов и заканчиваются добавлением одноэлементного класса. Для четных по номеру разбиений такие же дополнения производятся в обратном порядке. В результате этой обработки получается уже список разбиений множества из n натуральных чисел, где все классы по-прежнему остаются упорядоченны по возрастанию своих наименьших элементов, а любые два соседних разбиения отличаются только расположением элемента n и, следовательно, минимально различны. Следующая диаграмма демонстрирует пример рассмотренного рекурсивного процесса, который начинается с одноэлементного множества {1} и завершается списком разбиений множества из трех чисел {1,2,3}. Для наглядности разбиения каждого уровня пронумерованы, а добавленные элементы выделены подчеркиванием, кроме того, стрелки указывают направление добавлений:



Для практической реализации рекурсивного алгоритма минимального изменения удобно задать каждое разбиение вектором наименьших элементов его классов. Тогда в общем случае любое разбиение множества последовательных натуральных чисел от 1 до n представляется вектором E(n) из n значений, где каждое значение E_j обозначает наименьший элемент класса, которому принадлежит элемент j. Такое соответствие можно формально задать следующим образом:

$E_j = \min i \mid E_j = E_i$; $j = 1, \dots n$.

Для примера в следующей таблице перечислены все 5 последовательных разбиения множества {1,2,3} и соответствующие им векторы наименьших элементов их классов E(3):

1	2	3	4	5
{1 2 3}	{1 2} {3}	{1} {2} {3}	{1} {2 3}	{1 3} {2}
$(1_1\ 1_2\ 1_3)$	$(1_1\ 1_2\ 3_3)$	$(1_1\ 2_2\ 3_3)$	$(1_1\ 2_2\ 2_3)$	$(1_1\ 2_2\ 1_3)$

В соответствие с рекурсивным алгоритмом каждый вектор наименьших элементов E(n) классов разбиения множества из n элементов расширяет соответствующий вектор E(n−1) значением E_n для добавленного элемента n. При этом нужно последовательно присвоить E_n все различные значения из вектора E(n−1), которые равны по величине своим индексам ($j=E_j$) и n. Для нечетных по номеру векторов E(n−1) такое присваивание делается в порядке возрастания индексов, что соответствует увеличению значений наименьших элементов классов разбиения, и завершается присваиванием $E_n = n$:

$E_n = E_j \mid E_j = j = 1, \dots n$.

Например, вектор E(3) = (1,2,1), который соответствует разбиению { {1,3}, {2} }, с нечетным порядковым номером 5 расширяется в следующие различные варианты вектора E(4), образуя соответствующие им разбиения множества {1,2,3,4}:

E(3) = $(1\square_1\ 2_2\ 1_3)$ + (E4 = 1_1) –> ($1_1\ 2_2\ 1_3\ 1_4$) = E(4) ~ Ë;

E(3) = $(1_1\ 2\square_2\ 1_3)$ + (E4 = 2_2) –> ($1_1\ 2_2\ 1_3\ 2_4$) = E(4) ~ { {1 3} {2 4} };

E(3) = $(1_1\ 2_2\ 1_3)$ + (E4 = 4) –> ($1_1\ 2_2\ 1_3\ 4_4$) = E(4) ~ { {1 3} {2} {4} }.

Для четных по номеру векторов E(n−1) дополнение производится аналогично, но в порядке уменьшения значений наименьших элементов классов, и начинается присваиванием $E_n = n$:

$E_n = E_j \mid E_j = j = n, \ldots 1$.

Например, вектор E(3)=(1,2,2), который соответствует разбиению { {1}, {2 3} }, с четным порядковым номером 4 расширяется в следующие различные варианты вектора E(4), образуя соответствующие им разбиения множества {1,2,3,4}:

E(3) = $(1_1\ 2_2\ 1_3)$ + (E4 = 1_1) –> ($1_1\ 2_2\ 1_3\ 1_4$) = E(4) ~ { {1} {2 3} {4} };

E(3) = $(1_1\ 2\square_2\ 1_3)$ + (E4 = 2_2) –> ($1_1\ 2_2\ 1_3\ 2_4$) = E(4) ~ { {1} {2 3 4} };

E(3) = $(1\square_1\ 2_2\ 1_3)$ + (E4 = 4) –> ($1_1\ 2_2\ 1_3\ 4_4$) = E(4) ~ { {1 4} {2 3} }.

Несмотря на простоту, рассмотренный рекурсивный алгоритм нельзя признать экономичным, так как приходится последовательно порождать разбиения всех множеств с мощностями от 1 до n, хотя требуется получить разбиение только множества из n элементов. В этом отношении более привлекательным представляется *итерационный алгоритм минимального изменения* разбиений, который реализует систематический переход элементов между классами. При этом на каждой итерации очередное разбиение образуется из предыдущего переходом одного элемента в соседний класс слева или справа, если считать, что классы упорядочены по возрастанию значений своих наименьших элементов. Такой переход может изменять состав классов при сохранении их числа и приводить к удалению или образованию одноэлементного класса. В любом случае разбиения двух соседних итераций отличаются расположением только одного элемента в своих классах и, следовательно, минимально различны. В частности, следующая последовательность переходов элементов обеспечивает перечисление разбиений множества {1,2,3} в порядке минимального изменения, а стрелки указывают направление перехода элементов между классами:

{ { 1 2 ->3} }; { { 1 ->2}, { 3 } }; { {1}, { ->2}, {3} }; { {1} { 2 <-3 } }; { {1 3} {2} }.

В общем случае для систематической организации итерационного процесса важно установить правила перехода. Они должны обеспечивать выбор направления, элемента и классов перехода на каждой итерации при генерации разбиений любого множества последовательных чисел от 1 до n. Для формального описания этих правил удобно, как и раньше, задавать каждое разбиение вектором $(E_1,\ldots E_j,\ldots,E_n)$ наименьших элементов его классов, где:

$E_j = \min i \mid E_j = E_i$.

Для получения последующих разбиений на каждой итерации необходимо сначала выбрать для перехода наибольший по значению элемент m, который допустимо передвинуть вправо или влево в зависимости от установленного для него текущего направления перехода. Очевидно, переход влево любого элемента ограничен классом с наименьшим элементом 1, который сам не может быть влево или вправо. Переход вправо любого элемента j>1 ограничен классом, где он сам является наименьшим элементом. Поэтому правило выбора наименьшего элемента m для перехода на каждой итерации можно формально записать следующим образом:

$m = \max j \mid (E_{\leftarrow j} > 1$ или $E_{\rightarrow j} < j)$.

Для удобства практической реализации этого правила целесообразно ввести знаковую функцию d(j) кодирования направления перехода каждого элемента j. Она должна принимать значение +1 или −1 при переходе элемента j вправо или влево, соответственно. Тогда в правиле выбора переходного элемента m можно исключить альтернативную проверку направления перехода и записать его следующим образом:

$m = \max j \mid 0 < E_j + d(j) < j+1$.

После выбора переходного элемента m нужно инвертировать направления перехода для всех элементов i>m. Такое преобразование можно условно записать следующим образом:

$1 < m < \rightarrow i <\!-\!> \leftarrow i > m > 1 \sim d(i) = -d(i) \mid i > m$.

Наконец, требуется идентифицировать класс, куда следует передвинуть выбранный элемент m. Если для элемента m установлено направление перехода влево, то его необходимо передвинуть в соседний слева класс, наименьший элемент t которого определяется по следующему правилу:

$t = \max \{ E_j < m \mid E_j < E_m \}$.

Очевидно, что при переходе элемента m влево, между значениями t, m и Em должно быть выполнено следующее соотношение:

$t < E_m \leq m$.

Если для выбранного элемента m установлено направление перехода вправо, то возможны два случая. В одном случае элемент m переходит в соседний справа класс, где наименьший элемент меньше, чем m. В другом случае, когда наименьший элемент соседнего справа класса больше, чем m, или элемент m принадлежит крайнему правому классу разбиения, из m должен быть образован одноэлементный класс {m}.

Оба указанных случая учитывает следующее формальное правило, которое идентифицирует наименьший элемент t класса, куда попадет элемент m после перехода вправо:

$t = \min \{ m; E_{(j > m)} \mid E_j > E_m \}$.

Очевидно, что при переходе элемента m вправо, между значениями t, m и E_m должно быть выполнено следующее соотношение:

$E_m < t \leq m$.

Оба правила идентификации класса для перехода выбранного элемента m влево или вправо можно формально объединить, используя числовой код d(m) направления перехода элемента m. Такое комплексное правило автоматически учитывает направление перехода элемента m и идентифицирует наименьший элемент t класса для его перехода следующим образом:

$t = \min \{ m; E_j \mid d(m) \cdot E_j > d(m) \cdot E_m \}$.

Независимо от способа идентификации формальный переход выбранного элемента m в класс с наименьшим элементом t обеспечивает следующее присваивание:

$E_m <- t$.

В результате образуется очередное разбиение, которое отличается от разбиения предыдущей итерации только по составу двух классам, откуда и куда был передвинут элемент m. При этом в векторе наименьших элементов классов изменяется только значение E_m. Очевидно, что такое изменение разбиения является минимальным. Аналогичные итерации нужно продолжать до получения конечного разбиения, где для перехода формально выбирается элемент m=1, потому что все остальные элементы j>1 уже достигли своих крайних классов по установленному для них направлению перехода. Такое разбиение можно формально записать следующим образом:

$d(\rightarrow j) \cdot E_j = j$ или $d(\leftarrow j) \cdot E_j = -1$ при $j = 1, \ldots, n$.

Выполнение итераций рассмотренного итерационного алгоритма иллюстрируется в следующей таблице, где последовательные разбиения множества чисел {1,2,3} записаны в традиционном и векторном формате, а стрелки и знаки индексов обозначают направления перехода элементов:

{ →1 →2 →3□ }	{ →1 →2□ } { →3 }	{ →1 →} { 2 } { →3□ }	{ →1 } { →2 →3□ }	{ →1 →3 } { →2 }
(1_1 1_2 1_3□)	(1_1 1_2□□ 1_3)	(1_1 1_2 1_{-3}□)	(1_1 1_2 1_{-3}□)	(1_1 1_2 1_{-3})

3.3.2. Принцип включения и исключения

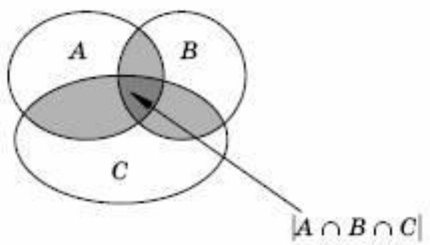
Пусть у множеств A и B общая часть насчитывает k элементов. Тогда всего, в объединении множеств A и B, число элементов равно $m+n-k,$ т. е. $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|.$

Понятно, что, складывая числа m и $n,$ мы засчитываем общие элементы дважды.

Правило включения – исключения распространяют на объединение произвольного числа множеств. Для трех множеств соответствующая формула написана ниже.

Теорема.

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |B \cap C| - |A \cap C| + |A \cap B \cap C|.$$



$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |B \cap C| - |A \cap C| + |A \cap B \cap C|$$

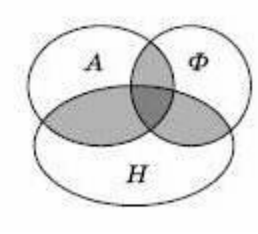
Доказательство.

Для доказательства обозначим число элементов в каждой из 7 частей трёх множеств, находящихся в «общем положении», некоторой переменной, а затем выразим через эти переменные каждое слагаемое в левой и правой части. Подставив полученные выражения в утверждение теоремы, убедимся в его правильности.

Другой способ рассуждений – убедиться в том, что элементы каждой из указанных 7 частей множества подсчитаны в правой части, причём, ровно по одному разу. Рассмотрим, например, элементы пересечения A и $B,$ не входящие в $C.$ В правой части они учитываются трижды: два раза в слагаемых $|A|$ и $|B|,$ один раз в слагаемом $|A \cap B|.$ Однако последнее в формулу входит со знаком минус, поэтому в результате элементы указанной части учитываются ровно по одному разу.

Пример.

В классе *30* человек, каждый из которых изучает иностранный язык. *20* человек изучает английский, *15* – французский и *17* – немецкий. При этом в группах изучающих по два языка насчитывается по *10* человек. Сколько человек изучает все три языка?



Применяем формулу включения – исключения: $|A \cup \Phi \cup H| = |A| + |\Phi| + |H| - |A \cap \Phi| - |A \cap H| - |\Phi \cap H| + |A \cap \Phi \cap H|$;

30 = 20 + 15 +17 - 10 - 10 - 10 + x , откуда *x = 8.*

Буквами *А*, *Ф* и *Н* обозначены множества учащихся, изучающих данный язык.

Задача о беспорядках

Классический пример использования формулы включений-исключений - ьзадача о беспорядках. Требуется найти число перестановок $(p_1, p_2, \ldots, p_n)$. Такие перестановки называются беспорядками.

Пусть U беспорядков:

$$D_n = n! - \binom{n}{1}(n-1)! + \binom{n}{2}(n-2)! - \ldots + (-1)^n \binom{n}{n} 0!.$$

Это соотношение можно преобразовать к виду

$$D_n = n! \left(1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \ldots + \frac{(-1)^n}{n!}\right).$$

Нетрудно видеть, что выражение в скобках является частичной суммой ряда $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} = e^{-1}$ перестановок:

$$D_n / P_n \approx 1/e.$$

Тема 4. Введение в теорию графов

4.1. Основные определения

Граф – это упорядоченная пара $G = <V, E>$, где V – непустое конечное множество (элементы множества V – вершины графа); E – конечное семейство неупорядоченных пар (необязательно различных) элементов V (элементы E – ребра графа).

Термин «семейство» говорит, что элементы в E могут повторяться. При этом повторяющиеся элементы в множестве E называют кратными ребрами. Если во множестве E нет повторяющихся элементов, то соответствующий граф называется простым.

<u>*Пример*</u>

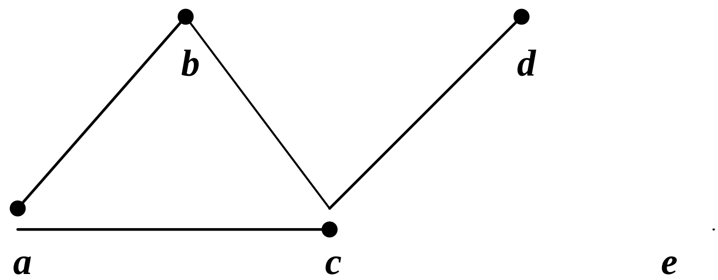


Рис.4.1.

На рис. 4.1 изображен простой граф с множеством вершин $V = \{a, b, c, d, e\}$ и множеством ребер $E = \{(a,b), (a,c), (b,c), (c,d)\}$.

Если в графе имеется ребро $e = uv$, то говорят: вершины u и v – *смежные*, или ребро e *инцидентно* вершинам u и v, или вершины u и v – *инцидентны* ребру e, или ребро e *соединяет* вершины u и v, или вершины u и v – *концы* ребра e.

Два различных ребра называются *смежными*, если они имеют, по крайней мере, одну общую вершину.

Ребро, соединяющее некоторую вершину саму с собой, называется *петлей*. Таким образом, простой граф – это граф без петель и кратных ребер.

Пример

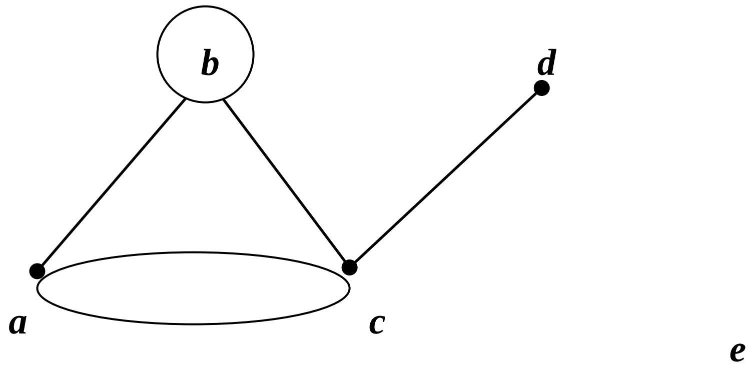


Рис. 4.2.

На рис. 4.2 изображен граф с множеством вершин $V = \{a, b, c, d, e\}$ и множеством ребер $E = \{(a,b), (a,c), (a,c), (b,c), (b,b), (c,d)\}$.

Ориентированный граф – упорядоченная пара $G = <V, A>$, где V – непустое множество вершин; A – семейство упорядоченных пар элементов V (необязательно различных). Множество A называют *семейством дуг*. Направленные ребра часто называют *дугами*. Первая по порядку вершина, инцидентная ребру ориентированного графа, называется его *началом*, вторая – *концом*. Ориентированный граф называют также *ор-графом*.

Упорядоченная пара элементов V представляет собой ребро (дугу), имеющее направление от одной вершины к другой.

Пример

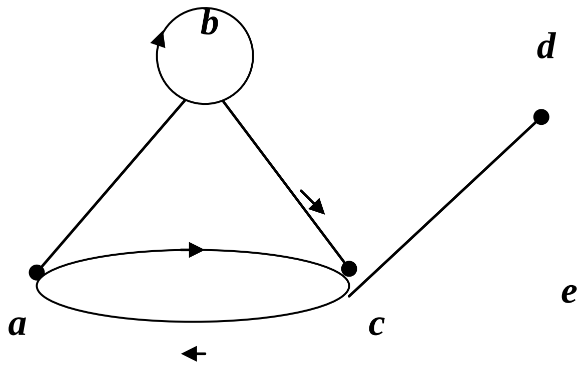


Рис. 4.3.

На рис. 4.3 изображен ориентированный граф с множеством вершин $V = \{a, b, c, d, e\}$ и семейством дуг $A = \{(a,b), (a,c), (c,a), (b,c), (b,b), (c,d)\}$.

Степенью вершины графа называется число инцидентных ей ребер. При подсчете степени вершины петли учитываются дважды. Степень вершины v обозначим $\rho(v)$.

Вершина v называется изолированной, если $\rho(v) = 0$, и висячей, если $\rho(v) = 1$. Справедливо следующее утверждение.

Теорема. *(Лемма о рукопожатиях)*. Сумма степеней всех вершин графа равна удвоенному числу ребер:

$$\sum_{v \in G} \rho(v) = 2|E|.$$

Доказательство. Действительно, каждое ребро дает вклад, равный 2, при подсчете суммы степеней всех вершин.

Следствие. В любом графе число вершин нечетной степени четно.

Граф без петель и кратных ребер, в котором каждая пара вершин соединена ребром, называется *полным*.

Пример Начало теории графов было положено Л. Эйлером при решении задачи о кенигсбергских мостах в 1736 году. Город Кенигсберг имел в те времена семь мостов, соединяющих острова на реке Преголя с берегами и друг другом, таким образом, как показано на рис. 9.5.а).

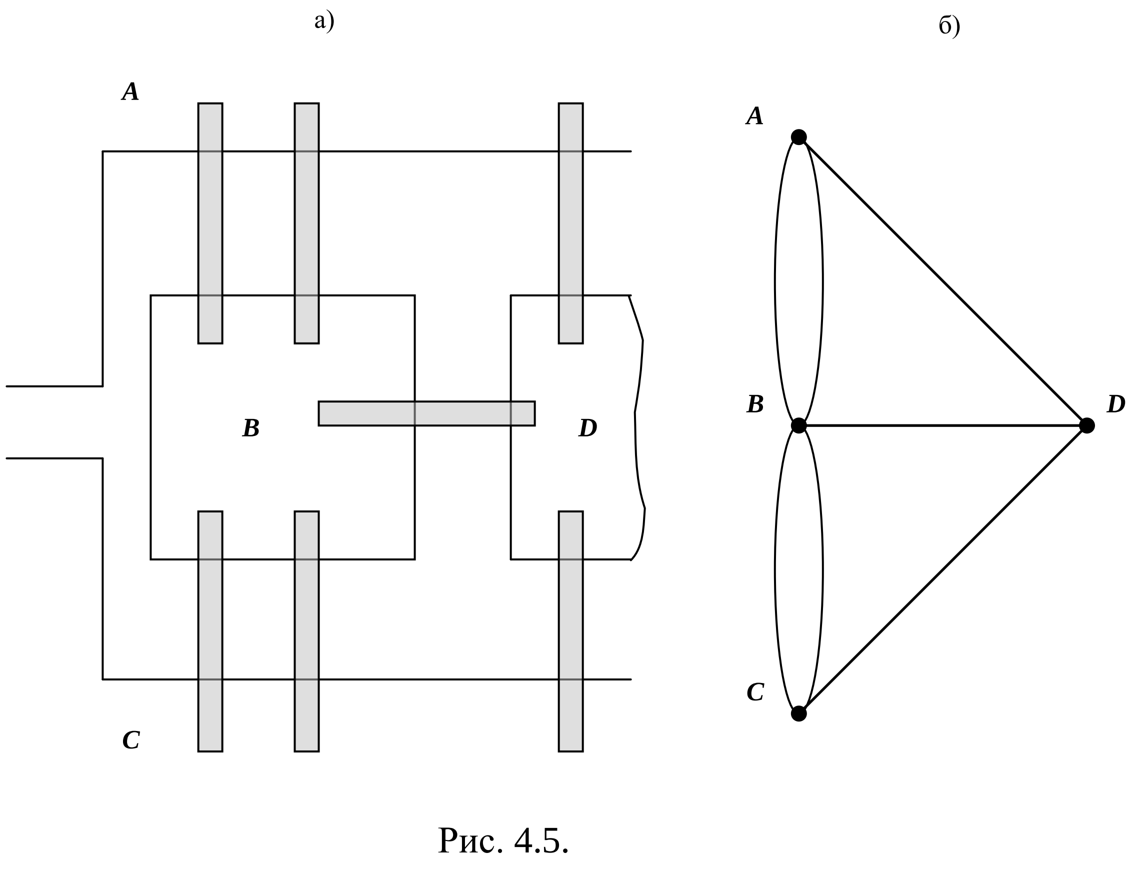


Рис. 4.5.

Жителям хотелось узнать: можно ли, выйдя из произвольной точки, вернуться в нее, проходя по каждому мосту ровно один раз. Л. Эйлер сформулировал эту задачу как задачу теории графов, заменив берега и острова вершинами, а мосты – ребрами. В результате получилась конфигурация, изображенная на рис. 4.5. Полученный граф является неориентированным, поскольку по мостам можно двигаться в обоих направлениях.

4.2. Способы задания графов

В общем случае для задания графа необходимо:

1) Описать множества его вершин и ребер.

2) Задать на множествах вершин и ребер отношение инцидентности.

Для описания вершин и ребер достаточно их занумеровать. Обозначим:

$v_1, \dots, v_n$ – вершины графа G;

$e_1, \dots, e_m$ – ребра графа G.

<u>Основные способы задания графов следующие:</u>

1. Графический способ.
2. В виде двух множеств вершин V и ребер E.
3. В виде матрицы инцидентности.
4. В виде матрицы смежности.
5. В виде списка ребер.

Первые два способа были рассмотрены выше. Поэтому рассмотрим более подробно последние три способа.

Зададим *матрицу инцидентности* $\{\varepsilon_{ij}\},\ i = \overline{1, m},\quad j = \overline{1, n},$ следующим образом: по вертикали и горизонтали указываются вершины и ребра соответственно. Если ребро e_i инцидентно вершине v_j, то $\varepsilon_{ij} = 1$. В противном случае, $\varepsilon_{ij} = 0$. Матрица $\{\varepsilon_{ij}\}$ называется *матрицей инцидентности* неориентированного графа G.

Для ориентированного графа элементы ε_{ij} матрицы инцидентности определяются следующим образом:

$$\varepsilon_{ij} = \left\{ \begin{array}{c} -1, \quad если \quad вершина \quad v_j - начало \quad ребра \quad e_i, \\ 1, \quad если \quad вершина \quad v_j - конец \quad ребра \quad e_i, \\ \alpha, \quad если \quad ребро \quad e_i - петля, \quad v_j - инцидентная \quad ребру \quad e_i - вершина, \quad \alpha \neq 0, \pm 1, \\ 0, \quad в \quad остальных \quad случаях \end{array} \right\}.$$

<u>Пример</u> На рис. 9.6 приведен граф, имеющий 5 вершин и 9 ребер (в том числе одну петлю). Чтобы различить нумерацию вершин и ребер, на рисунке номера ребер указаны курсивом.

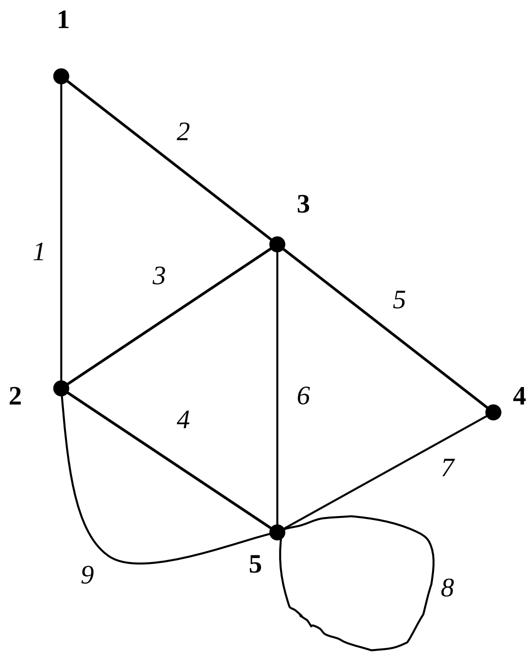


Рис. 4.6.

Матрица инцидентности имеет вид:

$$\{\varepsilon_{ij}\} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

<u>Пример.</u> На рис.4.7 изображен ор-граф, имеющий 5 вершин и 7 ребер (в том числе одну петлю). Номера ребер на рисунке указаны курсивом.

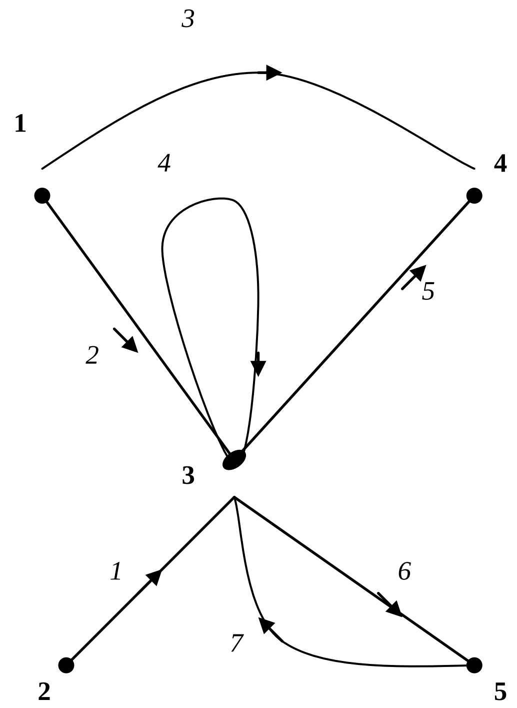


Рис. 4.7.

Матрица инцидентности этого графа имеет вид:

$$\{\varepsilon_{ij}\} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Рассмотрим далее задание графа с помощью *матрицы смежности*. Матрица смежности $\{\delta_{ij}\}$ графа является квадратной, столбцам и строкам которой соответствуют вершины графа. Для неориентированного графа элемент матрицы δ_{ij} равен количеству ребер, инцидентных i–й и j–й вершинам; для ор-графа этот элемент матрицы смежности равен количеству ребер с началом в i–й вершине и концом в j–й.

Матрица смежности неориентированного графа симметрична относительно главной диагонали $\delta_{ij} = \delta_{ji}$, а ориентированного графа не обязательно симметрична. Ориентированный граф с симметричной матрицей смежности канонически соответствует неориентированному графу, имеющему ту же матрицу смежности.

Пример 4. Выпишем матрицы смежности для графов, изображенных на рисунках:

$$\{\delta_{ij}\} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{2} \\ \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{2} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} \end{bmatrix},$$

$$\{\delta_{ij}\} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}.$$

Матрица смежности так же, как и матрица инцидентности, определяет соответствующий неориентированный или ориентированный граф. Число его вершин равно размерности матрицы n, i–й и j–й вершинам инцидентны δ_{ij} ребер. Для неориентированного графа $\delta_{ij} = \delta_{ji}$, и все его ребра определяются верхним правым треугольником матрицы смежности, включая главную диагональ. Количество их N_E равно сумме δ_{ij} в этом треугольнике, т.е.

$$N_E = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=i}^{n} \delta_{ij}.$$

В случае представления графа *списком ребер* отношение инцидентности задается списком ребер графа. Список ребер графа представляется двумя столбцами:

- в левом перечисляются все ребра $e_i \in E$;
- в правом – инцидентные соответствующему ребру вершины $v_{j'}$, $v_{j''}$.

Для неориентированного графа порядок вершин в строке произволен. Для ор-графа вначале должен стоять номер начала ребра.

4.3. Достижимость

Представим граф G = $<V, E>$ в другой форме:

$G = G(V, \Gamma(V))$,

где V – множество вершин $v_1, \ldots, v_n$ графа G,

$\Gamma(V)$ – отображение множества V на себя.

Пример. Построить ор-граф G, заданный множеством вершин $V = \{v_1, v_2, v_3\}$ и отображениями $\Gamma(v_1) = \{v_1, v_2\}$, $\Gamma(v_2) = \varnothing$, $\Gamma(v_3) = \{v_1, v_2\}$. Данный граф представлен на рис. 4.8.

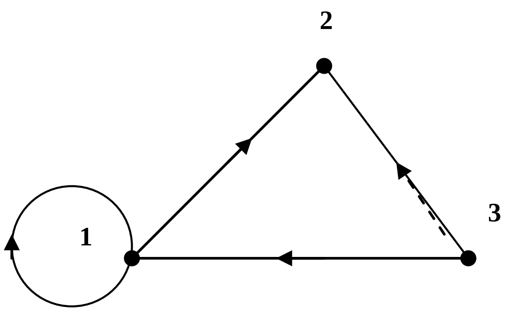


Рис. 4.8.

Вершина графа v_j называется *достижимой* из вершины v_i того же графа, если существует по крайней мере один путь из v_i в v_j.

Множество вершин $R(v_i)$, достижимых из некоторой вершины $v_i \in V$, определяется следующим выражением:

$$R(v_i) = \{v_i\} \cup \Gamma(v_i) \cup \Gamma^2(v_i) \cup \ldots \cup \Gamma^p(v_i). \qquad (4.1)$$

Действительно, первым элементом множества $R(v_i)$ является вершина v_i, которая достижима из себя самой с помощью пути длины нуль; $\Gamma(v_i)$ – множество вершин v_j, достижимых из v_i с использованием путей длины единица; $\Gamma^2(v_i)$ – множество вершин v_j, достижимых из v_i с использованием путей длины два; … ; $\Gamma^p(v_i)$ – множество вершин v_j, достижимых из v_i с использованием путей длины p. Таким образом, множество $R(v_i)$ получается путем последовательного выполнения слева направо операции объединения в выражении (9.1) до тех пор, пока мощность текущего множества не перестанет увеличиваться при очередной операции объединения. С этого момента последующие операции объединения не будут давать новых элементов множеству $R(v_i)$. Число объединений, которые необходимо выполнить, зависит от графа G. Но если граф конечен, то $p < n$ (n – число вершин графа).

Матрицей достижимостей $R = \{r_{ij}\}_n^n$ называется квадратная матрица порядка n, элементы которой r_{ij} определяются по формуле:

$$r_{ij} = \begin{Bmatrix} 1, & \text{если} \quad v_j \in R(v_i), \\ 0, & \text{в} \quad \text{противном} \quad \text{случае} \end{Bmatrix}.$$

Пример. Построить матрицу достижимостей графа G, изображенного на рис. 4.9.

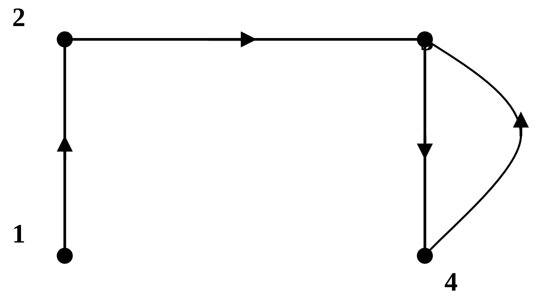


Рис. 4.9.

Решение. $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$, $\Gamma(v_1) = \{v_2\}$, $\Gamma(v_2) = \{v_3\}$, $\Gamma(v_3) = \{v_4\}$, $\Gamma(v_4) = \{v_3\}$.

$R(v_1) = \{v_1\} \cup \{v_2\} \cup \{v_3\} \cup \{v_4\} \cup \{v_3\} = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$,

$R(v_2) = \{v_2\} \cup \{v_3\} \cup \{v_4\} \cup \{v_3\} = \{v_2, v_3, v_4\}$,

$R(v_3) = \{v_3\} \cup \{v_4\} \cup \{v_3\} = \{v_3, v_4\}$,

$R(v_4) = \{v_4\} \cup \{v_3\} \cup \{v_4\} = \{v_3, v_4\}$.

Следовательно, матрица достижимостей

$$\boldsymbol{R} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Очевидно, что элементы $r_{ii} = 1$, $i = 1, 2, \ldots, n$, так как каждая вершина достижима из себя самой.

4.4. Степени вершин графа

Пусть G – неориентированный граф. Если степени всех вершин графа конечны, то данный граф называется *локально конечным*. В частности, любой конечный граф локально конечен.

Пример. Для графа, изображенного на рис. 9.6, степени всех вершин графа равны: $\rho(1) = 2$, $\rho(2) = 4$, $\rho(3) = 4$, $\rho(4) = 2$, $\rho(5) = 5$.

Если заданы матрицы инцидентности или смежности графа, то можно определить локальные степени всех его вершин.

Для матрицы инцидентности. В j–м столбце матрицы инцидентности, соответствующем вершине v_j, единицы стоят на пересечении со строками, которым соответствуют инцидентные этой вершине ребра, а остальные элементы столбца равны 0. Необходимо также учесть, что петля дает вклад в степень вершины, равный 2. Следовательно,

$$\rho(v_j) = \sum_{i=1}^{m} \varepsilon_{ij} (3 - \sum_{k=1}^{n} \varepsilon_{ik}),$$

где m – число ребер графа.

Для матрицы смежности. Элементы матрицы смежности δ_{ij} – это количество ребер, инцидентных вершинам v_i и v_j. Учтем также, что петля дает вклад в степень вершины, равный 2. В результате для матрицы смежности имеем следующую формулу

$$\rho(v_j) = \sum_{i=1}^{n} \delta_{ij} + \delta_{jj},$$

где n – число вершин графа.

Для вершин ориентированного графа определяются две локальные степени:

$\rho_1(v)$ – количество выходящих из вершины v ребер;

$\rho_2(v)$ – количество входящих в вершину v ребер.

Петля дает вклад в обе эти степени. Локальные степени вершин ориентированного графа можно выразить через коэффициенты его матрицы смежности:

$$\rho_1(v_i)=\sum_{j=1}^{n}\delta_{ij}, \qquad \rho_2(v_i)=\sum_{k=1}^{n}\delta_{ki}.$$

Так как каждое ребро ор-графа G имеет одно начало и один конец, то

$$\sum_{v\in G}\rho_1(v)=\sum_{v\in G}\rho_2(v)=m,$$

где m – число ребер графа.

4.5. Маршруты, цепи и циклы

Пусть G – неориентированный граф. *Маршрутом* в графе G называется такая конечная или бесконечная последовательность ребер $(\dots, e_0, e_1, \dots, e_n, \dots)$, что каждые два соседних ребра e_{i-1} и e_i имеют общую инцидентную вершину.

Одно и то же ребро может встречаться в маршруте несколько раз. Будем рассматривать в дальнейшем только конечные маршруты, т.е. конечные последовательности ребер $(e_1, \dots, e_n)$. В таких маршрутах имеется первое ребро e_1 и последнее ребро e_n. Вершина v_0, инцидентная ребру e_1 и не инцидентная ребру e_2 называется *началом маршрута*. Аналогично определяется *конец маршрута*.

Вершины, инцидентные ребрам маршрута, кроме начальной и конечной, называются *внутренними* или *промежуточными*. Начало и конец маршрута могут одновременно оказаться и внутренней вершиной.

Пусть маршрут $M = (e_1, \dots, e_n)$ имеет начало v_0 и конец v_m. Тогда его называют маршрутом, соединяющим вершины v_0 и v_m. Число ребер маршрута называется его *длиной*. Если $v_0 = v_m$, то маршрут называют *циклическим*. Отрезок $(e_i, \dots, e_{i+j})$ маршрута M сам является маршрутом. Он называется *участком маршрута* M.

Маршрут называется *цепью*, если каждое ребро встречается в нем не более одного раза, и *простой цепью*, если любая вершина графа инцидентна не более чес двум ребрам маршрута. Циклический маршрут называют *циклом*, если он является цепью, и *простым циклом*, когда это простая цепь. Участок цепи или цикла является цепью, а участок простой цепи или простого цикла – простой цепью.

Неориентированный граф без циклов (а значит, без петель и кратных ребер) называется *ациклическим графом*, или лесом. Пример леса приведен на рис. 4.10.

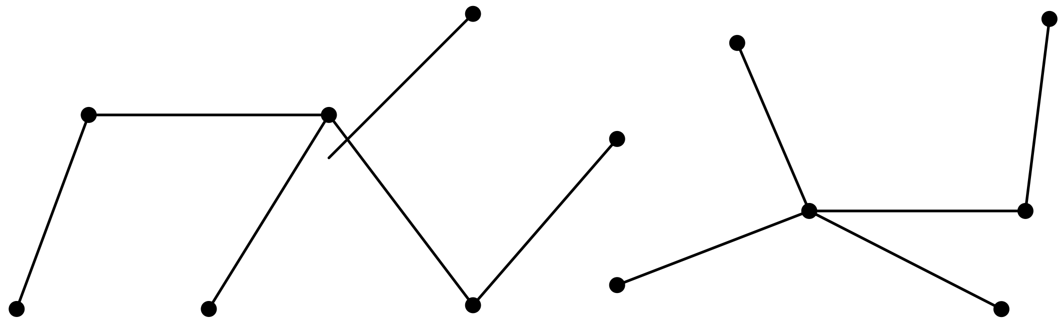


Рис. 4.10.

Вершины $v', v'' \in G$ называются *связанными*, если существует маршрут с началом v' и концом v''. В этом случае существует также маршрут с началом v'' и концом v'; для этого ребра маршрута должны перечисляться в противоположном порядке.

Граф G называется *связным*, если все его вершины связаны между собой. Неориентированный связный граф без циклов называется *деревом*. Пример дерева приведен на рис. 4.11.

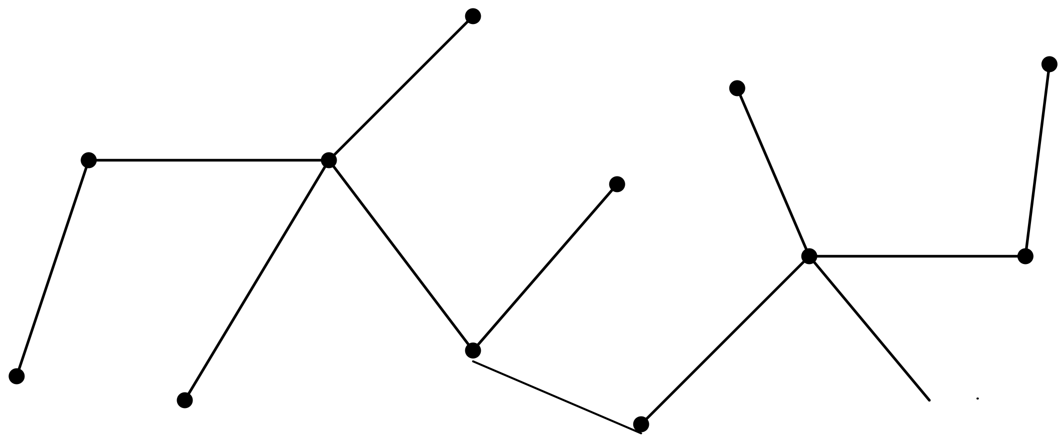


Рис. 4.11.

Таким образом, компоненты связности леса являются деревьями, т.е. лес – дизъюнктное объединение деревьев.

4.6. Расстояния в графе

Пусть G – связный неориентированный граф, v' и v'' – любые две его вершины. Тогда существует связывающая их простая цепь $M = (e_1, \dots, e_k)$. Если количество k ребер этой цепи не минимальное из возможных, то существует цепь $M' = (e_1, \ldots, e_{k'})$, связывающая v' и v'' и имеющая меньшее число ребер.

Минимальная длина простой цепи с началом v' и концом v'' называется *расстоянием* $d(v', v'')$ между этими вершинами.

Расстояние $d(v', v'')$ удовлетворяет аксиомам метрики:

1) $d(v', v'') \geq 0$;

2) $d(v', v'') = 0$ тогда и только тогда, когда $v' = v''$;

3) $d(v', v'') = d(v'', v')$;

4) Справедливо неравенство треугольника $d(v', v) + d(v, v'') \geq d(v', v'')$.

Пусть *G* – конечный связный неориентированный граф. Тогда можно определить его *диаметр* по формуле

$$d(G) = \max_{v', v'' \in G} d(v', v'').$$

Кратчайшие простые цепи, связывающие вершины $v', v'' \in G$ с максимальным расстоянием между ними, называются *диаметрально простыми цепями*.

Пусть *v* – произвольная вершина графа *G*. *Максимальным удалением* в графе *G* от вершины *v* называется величина

$$r(v) = \max_{v' \in G} d(v, v').$$

Вершина *v* называется *центром* графа *G*, если максимальное удаление от нее принимает минимальное значение

$$r(G) = \min_{v \in G} r(v).$$

Максимальное удаление *r(G)* от центра называется *радиусом* графа, а любая кратчайшая цепь от центра *v* до максимально удаленной от него вершины v' – *радиальной цепью*.

Центр не обязательно должен быть единственным. Например, в полном неориентированном графе *G* (любые две различные вершины такого графа соединены ребром) радиус равен 1 и любая вершина $v \in G$ является центром (рис. 4.12).

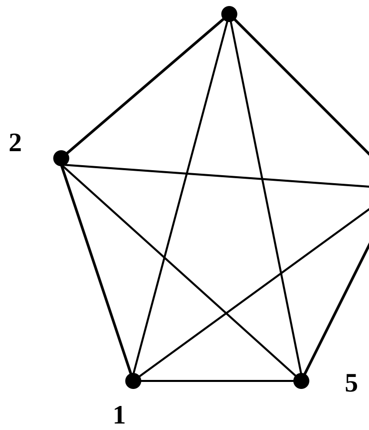


Рис. 4.12.

<u>*Пример*</u> Найти диаметр, центры, диаметральные и радиальные цепи графа, изображенного на рис. 4.13.

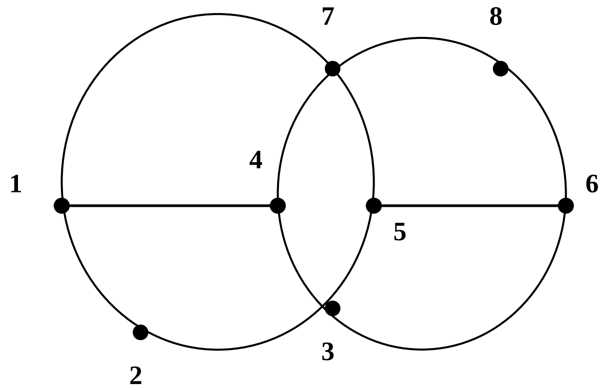


Рис. 4.13.

<u>*Решение.*</u> Перенумеруем вершины графа. Найдем расстояния между всеми вершинами графа: $d(i, j), i, j = \overline{1{,}8}.$ Образуем из полученных вершин матрицу расстояний $\{d(i,j)\}$. Матрицу расстояний удобно использовать для определения диаметра, радиуса и других величин. Она будет иметь следующий вид:

$$\{\mathbf{d(i,j)}\} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 1 & 2 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & 2 & 2 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 2 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 & 2 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & 2 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 1 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 2 & 2 & 2 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Найдем максимальный по величине элемент матрицы расстояний

$$\max_{i,\,j=1,\ldots,8} d(i,\,j) = 3.$$

В соответствии с данным выше определением диаметр графа равен 3. Диаметральные цепи имеют длину равную 3 и соединяют вершины 1 и 6, а также 2 и 8 (эти вершины находим с помощью матрицы расстояний: определяем строки и столбцы, соответствующие расстоянию, равному диаметру). Соответствующие диаметральные цепи графа, выраженные через вершины, имеют вид: (1,7,5,6), (1,4,3,6), (1,7,8,6), (1,2,3,6), (2,1,7,8), (2,3,6,8).

Определим для каждой вершины графа максимальное удаление. Для этого достаточно найти максимальную величину в каждой из строк матрицы расстояний: $r(1) = 3$, $r(2) = 3$, $r(3) = 2$, $r(4) = 2$, $r(5) = 2$, $r(6) = 3$, $r(7) = 2$, $r(8) = 3$. Из полученных величин выберем минимальное значение

$$\min_{i=1,\ldots,8} r(i) = 2.$$

Таким образом, радиус графа равен 2. Максимальное удаление, равное радиусу графа, имеют вершины 3,4,5,7. Они будут центрами графа. Укажем радиальные цепи для вершины 3: (3,2,1), (3,4,1), (3,4,7), (3,5,7), (3,6,8). Как и диаметральные цепи, они записаны с помощью номеров вершин.

4.7. Эйлеровы циклы

Цикл, содержащий все ребра графа, называется *эйлеровым циклом*. Граф, имеющий эйлеровые циклы, называется *эйлеровым графом*.

Теорема (Эйлера). Конечный неориентированный граф является эйлеровым тогда и только тогда, когда он связан, и степени всех его вершин четны.

Примем без доказательства.

Возвращаясь к графу задачи о кенигсбергских мостах (рис. 9.5), заметим, что во-первых, данный граф связный, а, во-вторых, степени всех его вершин нечетны. Из теоремы Эйлера следует, что осуществить задуманный обход мостов невозможно.

Известен следующий *нерекурсивный алгоритм Флери* построения эйлерова цикла:

1. Начать цикл с произвольной вершины *u*. Присвоить произвольному ребру *uv*, инцидентному *u*, номер 1. Удалить из графа ребро *uv*, перейти в вершину *v*.

2. Пусть после *k* шагов мы находимся в вершине *w*. Выбрать произвольное ребро *wt*, причем мост выбирается только в том случае, если нет другой возможности. Ребру *wt* присвоить номер $k + 1$. Удалить из графа ребро *wt*, перейти в вершину *t*.

Число шагов в описанном алгоритме совпадает с числом ребер в графе. По окончании работы алгоритма ребра исходного графа будут пронумерованы в порядке их следования в эйлеровом цикле.

Ирина Владимировна Сафронова

Дискретная математика

Конспект лекций

Подписано в печать	Усл. печ. л.	Уч.-изд. л.
Формат 60X84 1/16.	Тираж экз.	Заказ №